विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

हमारे तटों की बदलती पारिस्थितिकी *

बी० एन० देसाई
राष्ट्रीय समुद्र विज्ञान संस्थान दोनापोला, गोवा

भारत की तटरेखा 7000 किमी॰ से भी अधिक लम्बी है तथा भारत की 25 प्रतिशत जनसंख्या तटीय क्षेत्रों में ही निवास करती है। तटीय क्षेत्रों ने उत्कृष्ट बन्दरगाह सुलभ करवाये हैं, जिनके आस-पास विस्तृत मानवीय बस्तियाँ तथा उद्योग विकसित हुए हैं। तटीय समुद्रों, ज्वार-नदमुखों तथा नदियों का उपयोग व्यापक रूप से परिवहन, खाद्य, संचार, अपशिष्ट-निपटान तथा मनोरंजन के लिये होता रहा है।

तटों पर बढ़ती मानवीय क्रियाशीलता ने तटरेखा तथा इसकी पारिस्थितिकी पर और अधिक दबाव डाला है। तटों के समान्तर बहुत से स्थान सुधारे (कृषि योग्य बनाये) गये हैं तथा बहुत से क्रमिक ढाँचे बनाये गये हैं जिनसे तटरेखा का प्राकृतिक स्वरूप परिवर्तित हो गया है। तटों के समान्तर निकट तटीय क्षेत्र में तटीय पारितंत्र अत्यन्त उत्पादक तथा मात्स्यिकी संकेन्द्रित है और अब पर्यावरण-संरक्षण के प्रति जागरूकता तथा सतत विकास की भावना बढ़ रही है।

बदलती तट रेखा

यह सुस्पष्ट है कि संसार की तटरेखा समय-समय पर बदलती रहती है। गत शताब्दी के दौरान संसार की तटरेखा के पीछे हटने का अनुपात उसके आगे बढ़ने की तुलना में अधिक है, हालांकि विस्तृत क्षेत्र स्थिर रहे हैं या उन्होंने आगे बढ़ने या पीछे हटने का कोई निश्चित प्रमाण प्रदर्शित नहीं किया है। अहमद[1] के अनुसार भारत की लगभग 55 प्रतिशत तटरेखा पुलिन-तटीय [फ्रिन्ज्ड बीच] हैं तथा पिछले कुछ दशकों में पुलिन सामान्यतः या तो स्थिर हैं अथवा पीछे हटे हैं।

---

*2 जनवरी 1993 को गोवा में सम्पन्न 80वें भारतीय साइंस कांग्रेस अधिवेशन के अवसर पर विज्ञान परिषद अनुसन्धान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षीय भाषण।

भारत के पश्चिमी तट पर, विशेषकर कच्छ की खाड़ी के पास, ज्वालामुखी अवतलन तथा उसके बाद जलोढ़न एवं पुर:क्रमण के कारण जलमग्नता की घटनायें हुई हैं। कैम्बे की खाड़ी लगातार दलदली पुर:क्रमण का क्षेत्र है तथा नर्मदा, तापी एवं उल्हास के ज्वारनदमुखों के मध्य, एवं आगे दक्षिण में, बड़ी मात्रा में अवसाद विसर्जन होता है जो आंशिक रूप से तटीय मैदान में अवनालिका अपरदन से उत्पन्न है। नर्मदा के मुहाने पर द्वीपों में सिल्ट तथा मिट्टी की क्रमिक अभिवृद्धि प्रेक्षित की गयी है (बेदी एवं वैद्यनाथन)[3]। गोवा में वागले[24] ने निष्कर्ष निकाला है कि तटरेखा पुलिनों [बालुकातटों] के समान्तर पुर:क्रमित हो रही थी जबकि भृगुओं और अंतरीपों के समान्तर पीछे हट रही थी। लेकिन रेतीले केरल तट पर विभिन्न भागों में सतत प्रतिसरण होता रहा है। यह प्रतीत होता है कि कुछ संरक्षात्मक उपाय स्वयं ही दूसरे क्षेत्रों में अपरदन के फैलने के लिए उत्तरदायी हैं।

पूर्वी तट पर प्रमुख पुर:क्रमणी खण्ड कृष्णा, गोदावरी, महानदी तथा गंगा के डेल्टा पर हैं, जहाँ ये नदियाँ बड़ी मात्रा में अवसाद-आपूर्ति करती हैं। ये डेल्टाई तटरेखायें सामान्यतया कीचड़युक्त हैं, परन्तु जहाँ रेत है वहाँ पुलिन तथा भूजिह्वायें बन गयी हैं। चक्रवातों के दौरान अपरदन से कृष्णा डेल्टा का सामान्य पुर:क्रमण बाधित हुआ है (राव तथा वैद्यनाथन)[16]। महानदी डेल्टा पर बारी-बारी से अग्रगमन एवं पश्चगमन प्रेक्षित किया गया जबकि ब्राह्मणी नदी के मुहाने को सीमाबद्ध कर रही तटरेखा में अभी हाल ही में अपरदन हुआ है (मीजेरिन्क)[9]। पूर्वी तट के समान्तर बन्दरगाहों की कृत्रिम संरचनाओं ने तट के समांतर अवसाद-संचलन को प्रभावित किया है तथा इन बन्दरगाहों के निकट पुलिन-अपरदन का पता चला है।

अवतलन, बढ़ता समुद्र जलस्तर, तूफान और तूफान महोर्मियाँ, नदियों से अवसाद निवेश, अवसाद पुर्नवितरण तथा तटों के समान्तर कृत्रिम संरचनायें तटरेखा में रूपात्मक परिवर्तन के लिये कुछ उत्तरदायी घटक हैं।

अवतलन

अवतलन आंशिक रूप से महाद्वीपीय-पर्पटी सीमाओं के समान्तर आपेक्षिक संचलन के कारण बहुधा होने वाली तटीय प्रक्रियाओं का परिणाम है तथा अंशत: यह नदियों द्वारा जमा अवसाद से संपिडन तथा समस्थितिक प्रतिपूरण को प्रदर्शित करता है। आन्तरिक संस्तर से भूजल या पेट्रोलियम का पृथक्करण भी स्थानीय अवतलन को बढ़ा सकता है। डेल्टाई क्षेत्रों में नदियों द्वारा लाये गये अवसाद सामान्यत: अवतलन की दर के बराबर या उससे अधिक दर से जमा होते हैं तथा डेल्टा की स्थिति समुद्रस्तर सापेक्ष रहती है या समुद्र की ओर पुर:क्रमण होता है। तथापि यदि अवसाद-निवेश-प्रतिरूप परिवर्तित होता है तो यह प्राकृतिक प्रक्रिया बदल जायेगी।

नदियों का अवरोधन

नदियों द्वारा तटों पर अवसाद-निवेश में परिवर्तन का एक प्रमुख घटक है नदियों का बढ़ता अवरोधन तथा समुद्र में उपवाह वाली नदियों का मार्ग-परिवर्तन। गंगा तथा ब्रह्मपुत्र सहित बंगाल की

खाड़ी में कुल नदी विसर्जन लगभग 1529 किमी.[3] है। पश्चिमी तट के समान्तर कुल विसर्जन लगभग 298 किमी.[3] है। संभवतः केरल तट के समान्तर अपरदन का एक कारण नदियों के अवरोधन के कारण अवसाद-निवेश में परिवर्तन भी हो सकता है। तथापि, इस पहलू के विस्तृत अध्ययन की आवश्यकता है। चूँकि नदियों का अवरोधन पश्चभूमि में होता है, अतः सामान्यतः इस बारे में तटीय समस्याओं पर कार्य करने वाले समुद्र-वैज्ञानिकों से कोई सलाह नहीं ली जाती तथा इस समस्या पर कोई नियंत्रण नहीं हो पाता है।

नदी के जल का मार्गपरिवर्तन या निष्कासन तथा अवसाद-विसर्जन तटीय पर्यावरण में भारी परिवर्तन ला सकता है और हम अक्सर तटीय पारितंत्र में होने वाले संभावित प्रभावों का ठीक-ठीक पूर्वानुमान नहीं कर पाते हैं। मीठे पानी के निवेश में कमी ज्वारनदमुखों तथा मैंग्रोव दलदलों की उत्पादकता में प्रबल परिवर्तन कर सकती है। जैविक प्रभाव नदी के अवरोधन के पश्चात् थोड़े ही समय में अनुभव किया जा सकता है जबकि ऐसा भूवैज्ञानिक प्रभावों के साथ नहीं, जहाँ अन्तिम प्रभाव अवरोधन के लम्बे समय बाद ही अनुभव किया जा सकता है तथा समय के साथ समस्या और बदतर हो सकती है। पर्यावरणीय प्रभाव के अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि अवरोधन के पहले तथा बाद में तटीय पर्यावरणीय स्थितियों को प्रलेखित किया जाये। भारत में ऐसे अध्ययन कम देखने में आये हैं।

समुद्र जल-स्तर में वृद्धि

यह प्रेक्षित कर लिया गया है कि पूरी दुनियाँ में समुद्र का जल-स्तर बढ़ रहा है। लगभग 15 हजार वर्ष पहले अन्तिम हिम युग की समाप्ति के साथ हिमानी के हिम आवरण के पिघलने से विश्व में समुद्र जलस्तर लगभग 100 मी० बढ़ चुका है। समुद्र जलस्तर अपने वर्तमान स्तर पर लगभग 5 हजार वर्ष पहले पहुँचा तथा तब से प्रतिवर्ष 1 मिमी० के एक अंश तक बढ़ जाता है हालांकि इस शताब्दी में फॉसिल ईंधन के दहन में वृद्धि से प्राकृतिक स्थिति बदल गयी है, जिससे बहुविचारित 'ग्रीनहाउस प्रभाव' उत्पन्न हुआ है। वातावरण में कार्बन डाइ आक्साइड तथा अन्य 'ग्रीनहाउस' गैसों का संकेन्द्रण तेजी से बढ़ना जारी है जो बदले में व्यापक "सार्वभौम तापन"—ग्लोबल वार्मिंग—को उत्पन्न करता है। इससे पिछली शताब्दी की तुलना में समुद्र जलस्तर में वृद्धि की दर बढ़ जायेगी। इस समय ग्लोबल समुद्र स्तर वृद्धि की दर 1 मिमी० प्रति वर्ष है, हालांकि यह विभिन्न स्थानों पर भिन्न-भिन्न है। भारतीय तट पर समुद्र जलस्तर में दीर्घकालिक परिवर्तन लगभग 1 मिमी० प्रतिवर्ष है।

यद्यपि वर्तमान जानकारी समुद्रस्तर की भावी वृद्धि के यथातथ्य पूर्वानुमान के लिए अपर्याप्त है, किन्तु यह संभावित सीमा के पूर्वकथन के लिए पर्याप्त है। विभिन्न दृश्य-विधानों से अगली शताब्दी के अंत तक 25 सेमी० से लेकर 2 मी० से अधिक कुल वृद्धि का अनुमान है (हॉफमैन इत्यादि)[4]। यदि यह क्षेत्रीय अवतलन से मिल जाये तो यह सम्भव है कि भारतीय तटरेखा के समान्तर बहुत से क्षेत्र जलमग्न हो जायें। भारतीय तटरेखा के समान्तर पूर्वानुमानित समुद्र जल-स्तर वृद्धि के परिणामों की दृष्टि से सबसे संवेदनशील क्षेत्र लक्षद्वीप समूह तथा अन्दमान व निकोबार द्वीप हैं (शेट्ये इत्यादि)[21]। पश्चिमी तट की अपेक्षा भारत का पूर्वी तट अधिक सुभेद्य है तथा उसके बढ़ती हुई तूफान महोर्मियों से

पीड़ित होने की संभावना है। पश्चिमी तट पर 12° तथा 18° उ० के मध्य की तटीय पट्टी सबसे सुरक्षित प्रतीत होती है।

भू-हानि एवं जलमग्नता के कारण सम्पत्ति की हानि, त्वरित तटीय अपरदन, तूफान महोर्मियों तथा तटीय बाढ़ द्वारा क्षति में वृद्धि, नमक एवं जल के अन्तर्वेधन से जलभर को क्षति, नदियों, तटीय निवेशिकाओं तथा कृषि भूमि में लवणीय जल का बढ़ता हुआ अन्तर्वेधन, तटीय पारितंत्र, अधिवास तथा मात्स्यिकी की क्षति समुद्र जल-स्तर वृद्धि के अनुमानित परिणाम हैं।

प्रदूषण एवं तटीय पारितंत्र

घरेलू तथा औद्योगिक स्रोतों से तरल एवं ठोस अपशिष्ट पदार्थ बड़ी मात्रा में नदियों, खाड़ियों तथा निवेशिकाओं में छोड़ दिए जाते हैं, जो अन्त में तटीय समुद्र में पहुँच जाते हैं। चूंकि जल का कुल आयतन बहुत अधिक है, अतः यह आभास हो सकता है कि समुद्र में छोड़ा गया अपशिष्ट आयतन में इतना कम है, तथा समुद्र इसे बिना प्रदूषण उत्पन्न किये आत्मसात् कर सकता है। पर बात ऐसी नहीं है क्योंकि समुद्र में डाला गया अपशिष्ट पदार्थ समुद्री जल के आयतन में सर्वत्र समान रूप से नहीं फैलता है। पिछले दो या तीन दशकों में भारतीय तट के समान्तर बहुत से उद्योग एकाएक प्रकट हुए हैं। निपटान के पहले बहिःस्राव के उपचार की ओर बहुत कम ध्यान दिया गया है। अपशिष्ट-निपटान के कारण तटीय पर्यावरण में होने वाली विकृति तथा विसर्जन के पहले बहिःस्राव के उपचार की आवश्यकता की ओर तो हाल ही में जागरूकता उत्पन्न हुई है। भारतीय तटों पर उद्योगों द्वारा समुद्र में डाला जाने वाला औद्योगिक अपशिष्ट लगभग 0.41×19^{9} घन मीटर प्रतिवर्ष आकलित किया गया है। तटीय जनसंख्या द्वारा समुद्र में डाला जाने वाला घरेलू मलजल 4.1×10^{9} घन मीटर प्रति वर्ष है। यह अनुमान लगाया गया है कि भारतवर्ष में लगभग 50 लाख टन उर्वरकों, 55 हजार टन कीटनाशकों तथा 125 हजार टन कृत्रिम अपमार्जकों का उपयोग होता है। इनका एक बहुत बड़ा अंश तटीय जल में चला जाता है। इन पदार्थों की यथेष्ट मात्रा जैवनिम्नीकरणीय है, जबकि अन्य मात्रा जैवनिम्नीकरणीय नहीं है। लम्बे समय तक इनका संचित प्रभाव तटीय समुद्री पर्यावरण के लिए बहुत हानिकारक हो सकता है। सामान्यतः ये प्रभाव अभी भारतीय तट पर दिखाई नहीं देते परन्तु महानगरों तथा औद्योगिक केन्द्रों के निकट ये प्रभाव खतरे का संकेत देते हैं (कासिम तथा सेन गुप्ता)[14]। उदाहरण के लिए 1959 से 1984 की अवधि के दौरान बम्बई के निकट तटीय जल में फास्फेट-फास्फोरस संकेन्द्रण 0.82 से 2 माइक्रोमोल प्रति लीटर तक बढ़ गया (सेनगुप्ता इत्यादि[19] तथा झिंगडे)[26]।

यह अनुमान है नदियाँ बहुत सी विषाक्त भारी धातुयें समुद्र में ले जाती हैं। गंगा के ज्वारनदमुखीय क्षेत्र में निलंबित तथा विविक्त धातुओं के परीक्षण से प्रदर्शित होता है कि उनका लगभग 10 प्रतिशत भाग निचले ज्वारनदमुखीय क्षेत्र में, 50 प्रतिशत नदी के जल एवं समुद्री जल के संगम पर नीचे बैठ जाता है तथा अन्त में 40 प्रतिशत बंगाल की खाड़ी में बह जाता है। धातुओं के आँकड़ों की जाँच से पता चला है कि लगभग 85 प्रतिशत घुलित धातुएँ नदी के अन्दर ही बैठ जाती हैं तथा केवल 15 प्रतिशत बह कर बाहर जाती हैं (एन०आई०ओ०)[12]। भारतीय तट के समान्तर जल, प्राणिप्लवक,

मत्स्य तथा अवसादों में से एकत्रित पारे के आँकड़ों से बम्बई के निकट कुछ स्थानीकृत "हॉट स्पॉट" क्षेत्रों का संकेत मिलता है (झिगडे तथा देसाई)[25] तथापि इन "हॉट स्पॉट" क्षेत्रों के सूक्ष्म प्रेक्षण की आवश्यकता है। भारतीय जल में कुछ स्थानों पर समुद्री जीवजात में विषाक्त धातुओं के स्तर पर की गयी जाँच से संकेत मिला है कि इनका स्तर मानवीय उपयोग के लिए विश्व स्वास्थ्य संगठन द्वारा निर्धारित अधिकतम सीमा के नीचे है (कुरेशी)[6,7,8] तथापि जल, अवसाद तथा समुद्री जीवजात में विषाक्त धातुओं की उपस्थिति के कारण इसके लगातार मानीटरन की आवश्यकता है।

भारत के पूर्वी और मध्य पश्चिमी तटों पर प्राप्त अवसादों में कीटनाशी-अवशेषों पर हाल ही में किये गये अध्ययन से नौ जैव क्लोरीन कीटनाशकों तथा उनके उपापचय का पता चला है (सरकार तथा सेनगुप्ता)[17,18]। पूर्वी तट पर इन यौगिकों के अवशेषों के संकेंद्रण भाग प्रति दस लाख के स्तर पर घटित होते पाये गये हैं जबकि पश्चिमी तट पर ये भाग प्रति एक अरब हैं। अरब सागर के प्राणि-प्लवक में कीटनाशी अवशेषों का संकेंद्रण तट से दूर जाने पर कम होता है, यह उसकी स्थलीय उत्पत्ति तथा वायु द्वारा परिवहन की ओर संकेत करता है (कानून तथा सेनगुप्ता)[5]। हाल ही में किये गये एक अध्ययन से प्रदर्शित हुआ है कि नदियों द्वारा पश्चिमी तट पर फैलाये गये सूक्ष्म अवसाद निकटतटीय क्षेत्रों तक ही सीमित रहे। इन अवसादों का परिवहन यद्यपि शेल्फ के समान्तर हुआ किन्तु क्रास शेल्फ परिवहन न्यूनतम दिखाई देता है। इससे इस निर्णय तक पहुँचा जा सकता है कि पश्चिमी तट पर विसर्जित अवसाद सम्बद्ध प्रदूषकों के केवल आन्तरिक शेलफ में एकत्रित होने की संभावना है तथा वे अपतटीय क्षेत्रों में नहीं फैल पाते हैं (रामास्वामी तथा नायर)[15]।

भारतीय तट पर सर्वाधिक प्रदूषित क्षेत्रों में बम्बई के आस-पास का जल है। बम्बई महानगर से वर्ष में लगभग 3650 लाख टन मलजल तथा बहिःस्राव समुद्रों में विसर्जित किया जाता है। अकेली माहिम की खाड़ी में प्रतिदिन लगभग 64 मीट्रिक टन घरेलू मलजल तथा 0.9 मीट्रिक टन औद्योगिक अपशिष्ट प्रवाहित किया जाता है। प्रारम्भ में इन अपशिष्टों को बिना किसी उपचार के विसर्जित किया जाता था पर अब इनका आंशिक उपचार किया जाता है। बम्बई के तटीय जल में डाले गये कुल अपशिष्ट में माहिम नदी का योगदान केवल 15 प्रतिशत है (झिगडे)[26]। हाइड्रोकार्बन युक्त बहिःस्राव के विसर्जन ने खाड़ी को इतना अधिक प्रदूषित कर दिया है कि फिल्टरपत्र डुबो कर सहज ही तेल प्राप्त किया जा सकता है। कभी इस क्षेत्र में अच्छी मात्रा में मछलियाँ, समृद्ध शुक्ति-संस्तर, हरे-भरे सीमावर्ती मैंग्रोव तथा प्रवासी पक्षी थे। अब मात्स्यिकी का अस्तित्व नहीं है क्योंकि वहाँ कोई भी प्राणिजात जीवित नहीं रह सकते, न ही वहाँ पक्षी दिखाई देते हैं (कासिम तथा सेनगुप्ता)[14]।

बम्बई क्षेत्र में औद्योगिक अपजल सबसे अधिक थाना खाड़ी में डाले गये विभिन्न प्रकार के प्रदूषकों ने मत्स्य जीवन पर प्रतिकूल प्रभाव डाला है। मत्स्य-पकड़ बहुत कम हो गयी है तथा पकड़ी गयी अधिकतर किस्में प्रदूषित पायी गयीं। खाड़ी से पकड़े गये केकडों में पारे का स्तर 1.6 से 20 भाग प्रति दस लाख के बीच था जो अन्तर्राष्ट्रीय मानकों के अनुसार प्रदूषित माना जा सकता है। अवसाद-कोर में पारा-समृद्ध परत लगभग 10-25 सेमी॰ थी तथा अवसादों में पारे की अधिकता 14 टन के

बराबर सूचित की गयी। बसीन खाड़ी-उल्हास नदी, का जिसमें औद्योगिक अपशिष्ट की बड़ी मात्रा डाली जाती है, 1955 के पहले तक मत्स्य-उत्पादन 4500 टन प्रतिवर्ष था जो आज घट कर 100 से 150 टन प्रतिवर्ष रह गया है। यहाँ तक कि पकड़ी गयी मछलियों की यह थोड़ी मात्रा भी अधिक महत्व की नहीं है।

हाल ही में गुजरात राज्य के बहुत से ज्वारनदमुखों का अध्ययन किया गया है। दमनगंगा, कोलक, पार, अम्बिका, तापी तथा मिन्डोला ज्वारनदमुखों में मुख्यतया "पॉइन्ट डिस्चार्ज" द्वारा औद्योगिक अपशिष्ट डाला जाता है जिससे ये ज्वारनदमुख समग्र रूप से प्रदूषित पाये गये हैं (एन०आई०ओ०)[12]। इससे न केवल मत्स्य-पकड़ बहुत कम हो गयी है वरन् कुछ ज्वारनदमुखों में भाटे के दौरान अपजल के सीमित तनूकरण के कारण तथा प्रदूषकों की संकेन्द्रित मात्रा के कारण मछलियाँ मर जाती हैं। गहन रूप से प्रदूषित ज्वारनदमुखों में बाढ़ तथा भाटे के दौरान प्राणिप्लवक जैवभार में व्यापक उतार-चढ़ाव होते हैं। प्राणिप्लवक समूहों की प्रधानता प्रदूषण के स्तर के साथ परिवर्तित होती है। प्रदूषित ज्वारनदमुखों में विभिन्न प्राणिप्लवक समूहों की विविधता अपेक्षाकृत कम है (देसाई इत्यादि)[8]। सच तो यह है कि पूरे देश में बहुत कम ज्वारनदमुख ऐसे हैं जो मलजल अथवा औद्योगिक बहि:स्राव से कम या ज्यादा मात्रा में प्रदूषित नहीं हैं।

प्रदूषण के कई अन्य प्रकार जैसे तलकर्षण से निकली मिट्टी तथा खनन-अपशिष्ट के ढेर भी पारिस्थितिकी को प्रभावित करते हैं। ज्वारनदमुखों में खान अपशिष्ट, खनन मलबा तथा प्रक्षालन के कारण मात्स्यिकी तथा नितलस्थ प्राणिजात की कमी प्रेक्षित की गयी जिससे पारितंत्र की क्षति हुई हैं (परूलेकर)[13]। कूड़ा-कचरा, जहाज तोड़ने वाले यार्डों का रद्दी सामान, मछली पकड़ने के टूटे व बेकार जाल तथा अन्य सामान, अनावश्यक एवं खराब मछली का निपटान तथा पर्यटन उद्योग द्वारा उत्पन्न कचरा तथा अन्य अपशिष्ट भारत के तटीय जल को प्रदूषित करते हैं हालांकि इन पर परिमाणात्मक आँकड़ों की कमी है (सेनगुप्ता इत्यादि)[20]।

हिन्दमहासागर के आर-पार तेल टैंकर मार्गों के समान्तर दुनियाँ के 60 प्रतिशत कच्चे तेल इसके अन्य उत्पादों के परिवहन ने भारतीय समुद्रों को तेल प्रदूषण-प्रवण बना दिया है। समुद्र में तेल प्रदूषण या तो आग से, या टक्कर से या भूग्रस्त होने पर समुद्री दुर्घटना से छलकाव के कारण होता है। इसके अतिरिक्त यह तटीय समुद्र में तेल उत्पादन गतिविधियों के कारण भी होता है। समुद्र पर बहता तेल धीरे-धीरे वाष्पीकरण के कारण अपने हल्के अंश खो देता है तथा इस पर सूक्ष्मजीवों का आक्रमण होता है, जो हाइड्रोकार्बन को ऊर्जा के स्रोत के रूप में इस्तेमाल करने के अभ्यस्त होते हैं। इसके परिणामस्वरूप तेल घनत्व में बढ़ा हुआ प्रतीत होता है तथा अन्त में समुद्र तल के अवसादों में मिल जाता है। मई-सितम्बर के दौरान पश्चिमी तट के पुलिनों पर प्राय: पाये जाने वाले भारी पिण्ड, धाराओं के तेज अभितटीय घटक के कारण उद्वेलित, इन तारकोल अवशेषों का ही प्रतिनिधित्व करते हैं। 1975 तथा 1976 ई० के दौरान पश्चिमी तट के बहुत से पुलिनों पर किये गये प्रेक्षणों से औसत तारकोल निपेक्षण क्रमश: 28 तथा 20 ग्राम प्रति वर्ग मीटर प्राप्त हुआ। इसका अर्थ है कि लगभग 1000 टन तारकोल

तो केवल भारत के पश्चिमी तट पर निक्षेपित होता है। दिसम्बर-जनवरी के दौरान पूर्वी तट के पुलिनों पर भी तारकोल के पिण्डों का निक्षेपण पर्याप्त मात्रा में होता है। इन सभी अध्ययनों से पता चलता है कि मलजल, औद्योगिक तथा अन्य अपशिष्ट पदार्थों के अन्धाधुन्ध विसर्जन ने भारतीय तटों के समान्तर प्रदूषण-संचायिकाओं का निर्माण कर दिया है जिससे पारिस्थितिकी प्रभावित होती है।

प्रवाल-भित्तियाँ

भित्ति बनाने वाले प्रवाल भारतीय जल में पाक की खाड़ी, बंगाल की खाड़ी में अन्दमान-निकोबार द्वीपसमूह तथा अरबसागर में लक्षद्वीप द्वीपसमूहों में पाये हैं। खाद्य मछलियाँ, ऐक्वेरियम में रखी जाने वाली मछलियाँ प्रवालभित्तियों का वेलापवर्ती संसाधन निर्मित करती हैं। प्रवाल संसाधनों का सीमा से अधिक विदोहन भारतीय भित्तियों के लिए एक गम्भीर खतरा है। कच्छ की खाड़ी में वर्ष में लगभग दस लाख टन तक प्रवाल मृदा का तलकर्षण किया जाता है जिससे प्रवाल का लगभग 50 प्रतिशत जीवन नष्ट हो गया है। मन्नार की खाड़ी में विशाल कोरलों के चुनिन्दा अति-दोहन ने पहले ही बहुत सी भित्तियों को प्रभावित किया है। जैसा कि लक्षद्वीप द्वीपसमूहों में प्रेक्षित किया गया है प्रवाल-खनन से भी तट-अपरदन को बढ़ावा मिलता है। आभूषणों के लिए प्रवालों का व्यापार भी प्रवाल संपदा में कमी के लिए उत्तरदायी है। भारतीय प्रवाल भित्तियों के लिए वर्तमान प्रबंधन तथा संरक्षण-उपाय अपर्याप्त हैं (वाफर)[23]।

मैंग्रोव

भारतीय तट के समान्तर मैंग्रोव क्षेत्रों का आकलन 3500 से 7000 किमी०^2 तक पर्याप्त भिन्न-भिन्न है। ये मैंग्रोव तटों के समान्तर विशिष्ट पारितंत्र निर्मित करते हैं तथा मछलियों एवं वन्य जीवों के लिए प्राकृतिक वास का काम करते हैं। बहुत सी व्यापारिक रूप से महत्वपूर्ण प्रजातियाँ इस क्षेत्र को संवर्धन-स्थल के रूप में उपयोग करती हैं। मैंग्रोव वनों को आर्थिक रूप से महत्वपूर्ण, उत्पादक तथा विशिष्ट पारितंत्र माना जाता है। ये ज्वारनदमुखीय एवं मात्स्यिकी में, तटरेखा की सुरक्षा में, कागज और पल्प उद्योग के लिए लकड़ी उपलब्ध कराने में तथा ईंधन, टैनिन आदि में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं।

आधुनिक विकास के कारण भूमि-उद्धार, वनों की कटाई तथा प्रदूषण से मैंग्रोव सम्पदा को हानि हुई है। गंगा के सुन्दरबन, कोचीन पश्चजल, बम्बई, कच्छ की खाड़ी तथा अन्य क्षेत्रों में मैंग्रोव वनों की हजारों हेक्टेयर भूमि या तो कृषि, या शहरी विकास के उद्देश्य से सुधारी गयी है। इन क्रियाकलापों के कारण तटों के समान्तर मैंग्रोव क्षेत्रों में बहुत कमी आयी है। मैंग्रोव क्षेत्रों का उपयोग औद्योगिक बहिःस्राव, मलजल, तथा कचरे आदि के विसर्जन के लिए किया जाता रहा है। परिणामस्वरूप मैंग्रोव-जल की सामान्य उत्पादकता कम हो रही है। औद्योगिक बहिःस्राव ने बम्बई क्षेत्र में खाड़ी के समान्तर मैंग्रोव वनों को नष्ट कर दिया है।

प्राणिजात एवं मात्स्यिकी

भारत में समुद्री मात्स्यिकी निकटतटीय जल में लगभग 60 मी० गहराई तक संकेन्द्रित है। तटीय पट्टी में प्रग्रहण मात्स्यिकी की घटती प्रवृत्ति दिखाई देती है। इसका कारण प्रदूषण अथवा सीमा से अधिक विदोहन माना जाता है। व्यस्त पत्तनों तथा बन्दरगाहों में जहाजों से हुआ प्रदूषण तथा तलकर्षण समुद्रतलीय जल में आक्सीजन की उपलब्धता को घटा देता है जिससे परिस्थितियाँ लगभग आनॉक्सिक हो जाती हैं। नितलस्थ प्राणिजात पूरी तरह समाप्त हो जाता है जिसके परिणामस्वरूप मात्स्यिकी में महत्वपूर्ण कमी आती है। उदाहरणस्वरूप, बम्बई बन्दरगाह में मत्स्य-क्षेत्र दिनोंदिन तट से और अधिक दूरस्थ जल में हटता जा रहा है तथा मछुआरों को तट से 10 किमी० से भी अधिक दूर जाना पड़ता है (सेनगुप्ता)[20]। जैसा कि पिछले अनुच्छेदों में वर्णित है, भारतीय तटों के समान्तर कुछ स्थानों पर तटवर्ती तथा ज्वारनदमुखीय क्षेत्र भी औद्योगिक बहि:स्राव तथा मलजल निपटान से हुए प्रदूषण के कारण मात्स्यिकी की दृष्टि से पर्याप्त खाली हो गये प्रतीत होते हैं। तटीय पर्यावरण में असंसाधित मलजल तथा अनियंत्रित औद्योगिक बहि:स्राव ने कुछ कुछ जलनिकायों को आक्सीजन-अपूर्ण बना दिया है। भारत के समुद्री पर्यावरण में प्रदूषकों के जैविक प्रभाव का अध्ययन सुचारु रूप से नहीं हुआ है तथापि तटों, ज्वारनदमुखों तथा खाड़ियों के समान्तर प्रतिबंधित पर्यावरण में जनसंख्या तथा सामुदायिक स्तरों के प्रभाव को नोटिस किया गया है (सेनगुप्ता इत्यादि)[20]। गोवा ज्वारनदमुख में सीपी-मात्स्यिकी तथा तलीय प्राणिजात पर खनन क्रियाशीलता के प्रभाव के अध्ययन से 10 वर्ष से कम समय में सीपी उत्पादन में 70 प्रतिशत कमी, आवासी प्राणिजात का लगभग विनाश तथा सहिष्णु किन्तु भ्रमणशील प्रजातियों वाले तलीय प्राणिजात की अल्पविविधता की पुन: उपस्थिति के संकेत मिले हैं (परूलेकर इत्यादि[13]।

ऐसी सूचना मिली है कि कोचीन पश्चजल के कुछ क्षेत्रों में जैव प्रदूषण की मात्रा ज्वारनदमुखीय प्राणिजात के सहनशक्ति-स्तर से अधिक है (उन्नीथान इत्यादि)[22]। यद्यपि, सामान्य रूप से अभी समुद्री मात्स्यिकी पर प्रदूषण का प्रभाव खतरनाक नहीं है, पर जैसा कि कुछ स्थानों पर सुस्पष्ट है, जैव संसाधनों की क्षति के लक्षण निकट भविष्य में गम्भीर अनुपात में प्रकट हो सकते हैं। अत: प्रदूषण के दीर्घकालीन जैविक प्रभावों को समझना आवश्यक है।

उपसंहार

यह ध्यान रखना होगा कि यहाँ जो भी वर्णन हुआ है वह केवल भारतीय तटों के समान्तर बदलते समुद्री पर्यावरण के कुछ ही पहलुओं को सूचित करता है, हालांकि बहुत से अन्य अध्ययन एवं आँकड़े उपलब्ध हैं। तथापि, तटीय क्षेत्र के विवेकपूर्ण प्रबन्धन हेतु उत्तम योजनायें बनाने के लिए निम्न-लिखित कुछ पहलुओं पर विचार करना पूर्वापेक्षित है।

नूतन विकासमूलक इतिहास के साथ मौजूदा तटीय रूपाकारों का अभिलेखन आवश्यक है। तटरेखा परिवर्तनों के मानीटरन के लिए दूरसंवेदन तकनीक का उपयोग किया जा सकता है। नदियों

द्वारा तटों पर लाये गये जल एवं अवसाद विसर्जन के प्रतिरूप तथा आयतन की नियमित देखभाल की आवश्यकता है। तटीय पारितंत्र पर अवरोधन के प्रभाव का मूल्यांकन करने के लिए अवरोधन-पूर्व तथा अवरोधन-पश्चात् की स्थितियों के आँकड़ों की आवश्यकता है। चूँकि 'ग्रीनहाउस प्रभाव' के कारण समुद्र-जलस्तर-वृद्धि एक वास्तविकता दिखती है अतः तटीय विकास कार्यक्रमों के नियोजन के लिए समुद्र जलस्तर में होने वाले परिवर्तनों की कड़ी देखभाल आवश्यक है। भावी विकास हेतु तटरेखा के निकट के स्थानों का चुनाव भूतकाल तथा वर्तमान में होने वाली क्षेत्रीय तटीय-प्रक्रियाओं के विस्तृत अध्ययन के पश्चात् ही करना होगा। यद्यपि बन्दरगाहों में मिट्टी के जमाव की समस्या होगी, पर तटीय क्षेत्रों में अवसादों की आपूर्ति अपरदन क्रियाओं को रोकने के लिए आवश्यक है। अतः ऐसी गतिविधियों को कम करना या छोड़ना ही बुद्धिमत्ता होगी जो तटीय क्षेत्रों में अवसाद आपूर्ति को कम कर देती हैं। जहाँ विकासात्मक गतिविधियों ने प्राकृतिक अवसाद परिवहन में बाधा डाली है, उसके लिए आपूरण अच्छा विकल्प हो सकता है। तट के समान्तर प्राकृतिक पर्यावरण में बाधा डालने के पहले न केवल स्थानीय वरन् क्षेत्रीय पैमाने पर अध्ययन की आवश्यकता होगी। तटीय पारिस्थितिकी पर श्रेष्ठतर ढंग से ध्यान देने की आवश्यकता है। यद्यपि तटीय समुद्री पर्यावरण तथा पारितंत्र के कुछ परिवर्तन इन्द्रिय-गोचर हैं, पर कार्य-करण अध्ययन अथवा पर्यावरण-प्रभाव आकलन का उचित प्रयास नहीं किया गया है। इस कार्य को कठिन बनाने वाली एक समस्या यह भी है कि प्रदूषण का प्रभाव भिन्न दिक्काल पैमानों पर समुद्री पर्यावरण में होने वाले प्राकृतिक परिवर्तनों पर अध्यारोपित है। निगरानी के अन्तर्गत आने वाले क्षेत्र की विशालता इसे और अधिक जटिल बना देती है। चूँकि तटीय पट्टी में जनसंख्या तथा उद्योग बढ़ते जा रहे हैं इसलिए तटीय क्षेत्र में डाले जाने वाले अपशिष्ट की मात्रा भी बढ़ेगी। अतः प्रभाव-निर्धारण के साथ तटों का प्रदूषण-मानीटरन जारी रखने की आवश्यकता है तथा संयुक्त प्रभाव के बजाय कार्योत्पादक घटकों एवं उनके प्रभाव की अलग-अलग पहचान के लिए विशेष सावधानी की जरूरत है। इससे श्रेष्ठतर नियंत्रण उपायों को अपनाने में मदद मिलेगी। इन लक्ष्यों की प्राप्ति हेतु तटों पर तटीय मानीटरन केन्द्रों की स्थापना के साथ दूरसंवेदन तथा समुद्री प्लेटफार्म जैसे आधुनिक साधनों का उपयोग करना होगा।

निर्देश

1. अहमद, ई०, कोस्टल जिओमॉर्फोलॉजी ऑफ इंडिया, ओरियेंट लोंगमैन, नई दिल्ली, 1972 पृ० 222.

2. वेदी, एन० तथा वैद्यनाथन, आर०, इफैक्ट ऑफ नियोटेक्टोनिक्स ऑन द मॉर्फोलोजी ऑफ द नर्मदा रिवर इन गुजरात, वेस्टर्न इण्डिया, जरनल ऑफ जिओमॉर्फोलॉजी, 1982, **26**, 87-102

3. देसाई, बी० एन०, गजभिये, एस० एन०, जियालाल राम तथा नायर, वी० आर०, कम्परेटिव अकाउण्ट ऑफ जूप्लैंक्टन इन पोल्यूटेड ऐस्चुरीज ऑफ गुजरात, महासागर, बुलेटिन ऑफ एन०आई०ओ०, 1983, **16**, 281-291.

4. हॉफमैन, जे० एस०, कीज, डी० तथा टाइटस, जे० जी०, प्रोजेक्टिंग फ्यूचर सी लेवेल राइज, यू०एस०ई०पी०ए० रिप० 1983, 230-09-007, पृ० 121.

5. कानन, एस० टी० तथा सेनगुप्ता, आर०, ऑर्गेनोक्लोरीन रेजिड्यूज इन जूप्लैंक्टन ऑफ द सौराष्ट्र कोस्ट, मरीन पलूशन बुलेटिन, 1987, **18**, 92-94.

6. कुरैशी, टी०डब्लू०, जार्ज, एम०डी० तथा सेनगुप्ता, आर०, टोटल मर्करी कण्टेन्ट इन सम मरीन फिश फ्रॉम द इण्डियन ओशन, मरीन पॅलूशन बुलेटिन, 1978, **10**, 357-360.

7. कुरैशी, टी० डब्लू०, संझगिरि, एस०, जार्ज, एम० डी० तथा ब्रग्रांका, ए०, मर्करी, कैडमियम एण्ड लेड इन डिफरेन्ट टिशूज ऑफ फिशेज एण्ड इन जूप्लैंक्टन फ्रॉम दे अन्डमान सी, इंडियन जरनल ऑफ मरीन साइंसेज, 1983, **12**, 60-63.

8. कुरैशी, टी० डब्लू०, स्टडीज ऑन मर्करी, कैडमियम एण्ड लेड इन मरीन आर्गेनिज्म इन रिलेशन टु मरीन पॅलुशॅन इन द सीज अराउण्ड इंडिया, पी० एच० डी० थीसिस, अलीगढ़ मुस्लिम यूनीवर्सिटी, इंडिया, 1985, पृ० 183.

9. मीजरिक, ए०एम०जे०, डायनमिक जिआमार्फोलॉजी ऑफ द महानदी डेल्टा, आई०टी०सी० जर्नल, स्पेशल वेरसतप्पन इशू 1982, 243-250.

10. मिलीमैन, राईजिग सी लेवेल एण्ड चेंजिग सेडीमेंट इनफ्लक्सेजरियल एण्ड फ्यूचर प्रॉब्लम फॉर इंडियन ओशन कोस्टल नेशंस, इन: आई० ओ०सी० वर्कशॉप रिपोर्ट न० 37 सप्लीमेंट, यूनेस्को, 1985, 195-202.

11. एन० आई० ओ०, पॅलूशॅन असेसमेंट एण्ड हायड्रोग्राफिक स्टडीज ऑफ द फोर रिवर्स इन साउथ गुजरात, एन०आई०ओ०, रीजनल सेन्टर, बॉम्बे, रिपोर्ट 1980, पृ० 377.

12. एन०आई०ओ०, ए स्टडी ऑफ ऐस्चुअराइन इन्वाइरॅनमॅन्ट्स ऑफ मेजर इंडियन रिवर्स-गंगा एण्ड महानदी ऐस्चुअरीज, टेक्निकल रिपोर्ट, एन०आई०ओ०/टीआर-4/86, 1986.

13. परूलेकर ए०एच०, अन्सारी, जैड०ए० तथा इंगोले, बी०एस०, इफैक्ट ऑफ माइनिंग ऐक्टिविटीज ऑन द क्लैम फिशरीज एण्ड बॉटम फॉना आफ गोवा ऐस्चुअरीज, प्रोसीडिंग्स : इंडियन ऐकेडमी ऑफ साइन्स (ऐनिमल साइन्स) 1986, **95**, 325-339.

14. कासिम, एस० जैड० तथा सेनगुप्ता, आर०, सम प्रॉब्लम्स ऑफ कोस्टल पॅलूशॅन इन इंडिया, मरीन पॅलूशॅन बुलेटिन, 1988, **19**, 100-106.

15. रामास्वामी, वी० तथा नायर, आर०आर०, लैक ऑफ क्रास शेल्फ ट्रान्सपोर्ट ऑफ सेडीमेन्ट्स ऑन द वेस्टर्न मार्जिन्स ऑफ इंडिया : ऐवीडेन्स ऑफ क्ले मिनॅरैलाजी, जरनल ऑफ कोस्टल रिसर्च, 1989, **5**, 541-546.

16. राव, के० एन० तथा वैद्यनाथन, आर०, इवोल्यूशन ऑफ द कोस्टल लैंडफार्मस् ऑन कृष्णा डेल्टा फ्रन्ट, ट्रान्स, ईस्टीट्यूट ऑफ इंडियन ज्योग्राफी, 1979, **1**, 25-32.

17. सरकार. ए० तथा सेनगुप्ता, आर०, क्लोरीनेटेड पेस्टीसाइड रेजिड्यूज इन सेडीमेन्ट्स फ्रॉम द अरेबियन सी अलोंग विद सेन्ट्रल वैस्ट कोस्ट ऑफ इंडिया, बुलेटिन ऑफ कन्टैम, टाक्सिकोलॉजी, 1987, **39**, 1049-1054.

18. सरकार, ए० तथा सेनगुप्ता, आर०, क्लोरीनेटेड, पेस्टीसाइड रेजिड्यूज इन मरीन सेडीमेंट्स, मरीन पॅलूशॅन बुलेटिन 1987, **19**, 35-37.

19. सेनगुप्ता, आर० तथा शंकरनारायन, वी० एन०, पॅलूशॅन स्टडीज ऑफ बोम्बे, महासगर-बुलेटिन ऑफ एन०आई०ओ०, 1975, **7**, 73-78.

20 सेनगुप्ता, आर०, अली, एम०, भूइयान, ए० एल०, हुसैन, एम० एम०, शिलिंगम, पी० एम०, सुबासिघें, एस० तथा तिरमिजी, एन० एम०, स्टेट ऑफ द मरीन इनवाइरॅनमेन्ट इन द साउथ एसियन सीज रीजन, यू० एन० ई० पी० रीजनल सीज रिपोर्ट्स एण्ड स्टडीज न० **122**, 1990, 42.

21. शेट्ये, एस०आर०, गविया, ए०डी० तथा पाठक, एम०सी०, वल्नरेबिलिटी ऑफ द इण्डियन कोस्टल रीजन टु डैमेज फ्रॉम सी लेवेल राइज, करैन्ट साइंस, 1988, **59**, 152-156.

22. उन्नीथान, आर०आर०, बिजयन, एम० तथा रमानी, के० एन०, आॅर्गेनिक पॅलूशॅन इन कोचीन बैकवाटरर्स, इंडियन जर्नल ऑफ मरीन साइंस, 1975, **4**, 39-42.

23. वाफर, एम०बी०एम०, कोरल्स एण्ड कोरल रीफ्स इन इंडिया, प्रोसीडिंग्स इंडियन ऐकेडमी ऑफ साइन्स, (ऐनिमल साइन्स/प्लान्टसाइंस) सप्लीमैंट न०, 1986, 19-43.

24. वागले, बी० जी०, जिओमॉर्फोलॉजी ऑफ द गोवा कोस्ट, प्रोसीडिंग्स इंडियन एकेडमी ऑफ साइन्स (अर्थ एण्ड प्लैनेटरी साइंस), 1982, **91**, 105-117.

25. झिंगडे, एम० डी० तथा देसाई बी० एन०, मर्करी इन थाना क्रीक, बोम्बे हारबर, मरीन पॅलूशॅन 1981, **12**, 237-241.

26. झिंगडे, एम० डी०, वेस्ट वाटर एफ्लुअॅन्ट्स एण्ड कोस्टल मरीन इनवाइरॅनमेंन्ट ऑफ बोम्बे, प्रोसीडिंग्स सेमीनार ऑन सी वाटर क्वालिटी डिमान्ड्स, 1985, **20**, 1-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

ABO रक्त वर्ग एवं रोगों के बीच सम्बन्ध

चतुर्भुज साहु
मानव विज्ञान विभाग
गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह, बिहार-815301

[प्राप्त—जुलाई 9, 1992]

सारांश

अध्ययनों के दौरान यह पाया गया है कि *ABO* रक्त वर्ग एवं निश्चित रोग के बीच पारस्परिक सम्बन्ध है जैसे रक्तवर्ग *A* और परनिसियस एनीमिया, रिनललिथिएसिस, छोटी चेचक, चेचक, कैंसर, क्षय रोग, कार्सिनोमा, डायबेट्रीज मेलिटस, कुष्ठ, र्‌यूमेटिक, इसनोफिलिया, प्रोस्टेट, एडेनोम, डेन्टल केरिज, फॉस्फेट-1 आदि, रक्तवर्ग *B* और अस्थमा, रक्तवर्ग *AB* और इसनोफिलिया, चेचक आदि एवं रक्तवर्ग *O* और पेप्टिक अल्सर, ड्यूडेनल अल्सर, गैस्ट्रिक आदि। *O* वर्ग में पाये जाने वाले रोग प्राणघातक नहीं हैं।

चेचक से मरने वालों की संख्या 50 प्रतिशत पायी गयी जिनसे *A* तथा *AB* रक्त वर्ग वालों की संख्या अधिक थी क्योंकि रक्त वर्ग *A* (और सम्भवतः *AB*) में चेचक अधिक होता है तथा *B* और *O* में कम। अध्ययन से यह भी पता चलता है कि *O* वर्ग वाले *A* वर्ग की तुलना में अधिक स्वस्थ हैं।

भारत में क्षय रोग माइकोबैक्टीरिया नामक जीवाणु से होने वाली आम बीमारी है जिससे लगभग 8 मिलियन व्यक्ति ग्रसित हैं। विभिन्न आँकड़ों से पता चलता है कि अधिकांशतः *O* रक्त वर्ग वालों में क्षय रोग की प्रवृत्ति कम है। मध्य प्रदेश में क्षय रोग से ग्रसित होने वालों में *AB* वर्ग वालों की संख्या अधिक है तथा *B* वर्ग की संख्या कम है। ग्वालियर क्षेत्र में *O* वर्ग वाले क्षय रोगियों की बारम्बारता सबसे अधिक (47.3%) तथा पंजाब क्षेत्र में 43.1% है।

बिहार में विशेषकर तेली जाति में *O* वर्ग वालों में क्षय रोग की बारम्बारता कम (26.6%) पायी गयी है लेकिन *AB* वर्ग वालों की संख्या सभी स्थिति में सबसे कम पायी गयी है। क्षय रोग से ग्रसित पुरुषों एवं महिलाओं के बीच, कुल रोगी एवं कुल कंट्रोल के बीच तथा बिहार के तेली क्षय रोगी एवं मध्य प्रदेश के क्षय रोगी के बीच χ^2 (काई वर्ग) निकाला गया है तथा अन्तिम दोनों स्थितियों में महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया है (क्रमशः χ^2♂×♀=3.17, *df*=3, χ^2 रोगी एवं कंट्रोल=4.31, *df*=3 एवं χ^2 बिहारी रोगी×मध्य प्रदेशीय रोगी=17.27, *df*=3)।

विभिन्न प्रकार के क्षय रोगों में पल्मोनरी क्षय रोग की संख्या सभी रक्त वर्ग के पुरुषों एवं महिलाओं में अधिक पायी गयी है तथा मेनिन्जायटिस महिला रोगी *O* में कम हैं।

बिहार में विशेषकर तेली जाति में *O* वर्ग वाले स्वस्थ हैं और बुढ़ापे तक जीवित रह सकते हैं।

Abstract

Association between ABO blood groups and diseases with special reference to ABO and tuberculosis among the Teli caste. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih, Bihar.

A probable association between *ABO* blood groups has been presented by several investigators almost since the blood groups were first discovered in 1900. World-wide investigations on the search for this association have shown that most associations are with group *A*. *A* is associated with many serious diseases e.g. carcinoma of the stomach, pernicious anemia, eosinophilia, renal lithiasis, chicken pox, small pox, cancer, diabetes mellitus, tuberculosis, leprosy, prostrate adenom, rheumatic, dental carries etc. *O* group have an immunological advantage and are only associated with gastric and duodenal ulcers which are rarely fatal.

It has been observed that there is a tendency for individuals having blood group *O* to be less susceptible to tuberculosis. In Madhya Pradesh there is a great association between *AB* blood group and tuberculosis while in Gwalior *O* group having more association (47.3%) with tuberculosis. In Bihar, specially in Teli caste it has been found that only 26.6% *O* group individuals are associated with this disease. χ^2 (chi square) has been calculated between T. B. male and T. B. female, total patients and total control and T. B. patient of Bihar and T. B. patient of Madhya pradesh. Except first one, it has been observed significant differences exist (χ^2 ♂×♀=3.17 *df*=3,patient χ control=4.31 *df*=3 and patient of Bihar χ patient of M. p.=17.27 *df*=3, respectively).

Amongst the different types of tuberculosis, pulmonary type is more prevalent in all blood groups of both males and females.

Persons with blood group O (specially in Teli caste of Bihar) will generally be healthier and will reach an older age.

ABO रक्त वर्ग

कार्ल लैण्डस्टीनर (1900) ने खोज के दौरान पाया कि एक ही जाति के व्यक्तियों के रुधिर में भेद होता है। उन्होंने रुधिर के तीन भेद किये जिन्हें A, B तथा O नाम दिया। दो वर्ष बाद स्टरली तथा डेकैस्डेलो ने रुधिर के एक चौथे प्रकार की खोज की जिन्हें AB नाम दिया गया। इस प्रकार मनुष्य में रुधिर के चार मुख्य वर्ग होते हैं तथा प्रत्येक मनुष्य इन्हीं चार में से किसी न किसी एक वर्ग के अन्तर्गत आता है। इन समूहों का मुख्य आधार विशेष ऐण्टीजन तथा ऐण्टीबॉडी की उपस्थिति या अनुपस्थिति तथा उसके पारस्परिक सम्बन्ध पर आश्रित होता है। यह मुख्य रक्त-समूह दो ऐण्टीजन A तथा B और दो ऐण्टीबॉडी-ऐण्टी A एवं ऐण्टी B पर आधारित है। इन्हीं के आधार पर वर्गों के नाम A, B, AB तथा O रखे गये हैं। A रक्त-वर्ग के मनुष्यों की लाल रक्त कणिकाओं में ऐण्टीजन A तथा ऐण्टीबॉडी ऐण्टी B तथा B में ऐण्टीजन B तथा ऐण्टीबॉडी ऐण्टी A पाया जाता है। AB में ऐण्टीजन A एवं B दोनों होते हैं तथा इसके प्लाज्मा में कोई भी ऐण्टीबॉडी नहीं होता है। O वर्ग के मनुष्यों की लाल रक्त कणिकाओं में कोई ऐण्टीजन नहीं होता किन्तु इसके प्लाज्मा में दोनों ही ऐण्टीबॉडी होते हैं। O को सार्वजनिक ग्राहक कहते हैं।

इन चारों वर्गों के व्यक्तियों के जीन प्ररूपों की व्याख्या करने पर पता चलता है कि $O \times O$ के यौन सम्बन्ध से केवल O वर्ग वाली सन्तानें उत्पन्न होंगी, तथा $AB \times AB$ के सम्बन्ध से O सन्तान असम्भव है। अन्य तीनों प्रकार के व्यक्त प्ररूप सम्भव होंगे।

अतः रक्त समूह की खोजों ने रोग-निवारण के लिए एक नई दिशा प्रदान की तथा मानव में जेनेटिक पोलीमॉरफिज्म की जैवीय महत्ता की खोज के लिए रक्त-समूह एवं रोगों के बीच सम्बन्ध की ओर विशेष ध्यान दिया गया। अनेक शोधकर्त्ताओं ने रक्त-समूह एवं रोग के बीच सम्भावित सम्बन्धों को प्रकाशित किया। अध्ययन के दौरान यह पाया गया है कि निश्चित रोग एवं रक्त-समूह के बीच पारस्परिक सम्बन्ध है। सम्भवतः एलेक्जेण्डर[1] पहला व्यक्ति था जिसने निष्कर्ष निकाला कि B एवं AB रक्त वर्ग वाले व्यक्ति कार्सिनोमा को ग्रहण करने वाले थे। एयर्ड तथा अन्यों[2] ने पाया कि रक्त-समूह A एवं आमाशीय कार्सिनोमा के बीच सम्बन्ध है। प्रकाशित शोध कार्यों के आधार पर ABO रक्त-समूह एवं रोगों के बीच महत्वपूर्ण सम्बन्ध मिले हैं—जैसे रक्त वर्ग O और पेप्टिक अल्सर तथा O और आमाशय का कैंसर (एयर्ड तथा अन्य[3]), रक्त वर्ग A और परनिसियस एनीमिया (एयर्ड एवं अन्य[4], क्रिगर तथा अन्य[5])। यूरोपीय औद्योगिक एवं शहरी आबादी में यह लगभग 20% तक पायी गयी है (ब्युत्नर-यानुस[6]), रक्त वर्ग A एवं B और इसनोफिलिया, रक्त वर्ग A और रिनलिथिऐसिस, रक्त वर्ग B और अस्थमा (अहमद[7,8,9]), रक्त वर्ग A और छोटी चेचक (चक्रवर्ती तथा अन्य[10]), रक्त वर्ग A और कैंसर (धर्माराजु तथा अन्य[11]), रक्त वर्ग A और डायबेटिज मेलिटस (राम चन्द्रिया तथा अन्य[12]), रक्त वर्ग A एवं AB और चेचक (चक्रवर्ती[13]), ABO रक्त वर्ग एवं स्वाद प्रतिक्रिया

सारणी 1

विभिन्न रक्त वर्गों के एलीलों तथा उसकी स्थिति एवं पारस्परिक सम्बन्ध

पित्र्य व्यक्त प्ररूप	पित्र्य जीन प्ररूप	सन्तानों के जीन प्ररूप	सन्तानों के व्यक्त प्ररूप	असभम्व व्यक्त प्ररूप
$A \times B$	$AA \times AA$	AA	A	
	$AA \times AO$	AA, AO	A	B, AB
	$AO \times AO$	AA, AO, OO	A, O	
$B \times B$	$BB \times BB$	BB	B	
	$BB \times BO$	BB, BO	B	A, AB
	$BO \times BO$	BB, BO, OO	B, O	
$O \times O$	$OO \times OO$	OO	O	A, B, AB
$A \times B$	$AA \times BB$	AB	AB	
	$AO \times BB$	AB, BO	AB, B	$\times$
	$AA \times BO$	$AB \times AO$	AB, A	
	$AO \times BO$	AB, AO, O, BO	AB, A, B, O	
$A \times O$	$AA \times OO$	AO	A	B, AB
	$AO \times OO$	AO, OO	A, O	
$A \times AB$	$AA \times AB$	AB, AA	AB, A	O
	$AO \times AB$	AA, AB, AO, BO	A, AB, B	
$B \times O$	$BB \times OO$	BO	B	
	$BO \times OO$	BO, OO	B, O	A, AB
$B \times AB$	$BB \times AB$	BB, AB	B, AB	
	$BO \times AB$	AB, BB, AO, BG	AB, B, A	O
$AB \times O$	$AB \times OO$	AO, BO	A,B	O, A, B

(*PTC*) (चक्रवर्ती तथा अन्य[14]), *ABO* रक्त वर्ग एवं क्षय रोग (विजय कुमार तथा अन्य[15])। इंगलैण्ड में किये गये अध्ययनों के आधार पर ड्युडेनल अल्सर अधिकांशतः *O* रक्त वर्ग वाले व्यक्तियों में पाया गया है (क्लार्क [16,17,18,19])।

प्रकाशित रिपोर्ट विशेष जैवीय कार्यों एवं उसकी उपयोगिता को जानने के लिए महत्वपूर्ण तथ्यों को दर्शाती है तथा इससे यह भी पता चलता है कि विभिन्न परजीवियों के द्वारा हुए आक्रमण को व्यक्ति किस हद तक ग्रहण करता है। *ABO* रक्त-समूह एवं रोगों के बीच सम्बन्धों की खोजों में पाया है कि *A* रक्त-समूह के अधिक व्यक्ति खतरनाक रोगों से ग्रसित है। यदि *A* वर्ग खतरनाक रोगों (स्पर्शसंचारी तथा अस्पर्शसंचारी) से सम्बन्धित है तब यह आशा की जाती है कि औसतन *O* वर्ग वाले स्वस्थ होंगे और बुढ़ापे तक जीवित रहेंगे। वोगेल तथा अन्य[20], चक्रवर्ती[21], जोजेन सेन[22], चक्रवर्ती[23] ने विभिन्न प्रकार के रोगों—कार्सिनोमा, डायबेटिज मेलिटस, चेचक, कुष्ठ, परनिसियस एनीमिया, र्‍युमेटिक—के अध्ययन से पाया है कि *A* ग्रुप वाले ज्यादा प्रभावित हुए हैं जबकि *O* ग्रुप में इम्युनोलॉजीय फायदा है। सिर्फ गैस्ट्रिक और ड्युडेनल अल्सर ही *O* ग्रुप से सम्बन्धित है जो बहुत ही कम प्राणघातक है। यह लम्बे अरसे से प्रचलित है कि कुछ निश्चित बैक्टीरिया, प्रोटोजोवा तथा हेलमीन्थ्स में ऐण्टीजन होते हैं जो रक्त-समूह के तत्वों से सम्बन्धित हैं तथा यह देखा गया है कि कोई निश्चित जीव संघर्ष करता है। इन्फेक्शन की वेरेनिया दशा के समय यह अन्दाज किया जाता है कि रक्त वर्ग *B* एवं *O* की ऐण्टी *A* वायरस के ऐण्टीजन से प्रतिक्रिया करेगा जिससे *B* एवं *O* व्यक्ति कम प्रभावित होंगे तथा बिना ऐण्टी *A* (*A* और *AB*) वाले रोगियों में प्राणघातक रूप ग्रहण करेगा।

वर्तमान मानव में रक्त वर्ग का अध्ययन जीनी विभेदों के लिए अति महत्वपूर्ण हैं तथा अन्य सभी प्रविधियों से रक्त-समूह का ज्ञान सबसे अधिक भी है। बाइनर[24] के अनुसार कॉकेशियाई समूह के अन्तर्गत *ABO* रक्त-समूह में अधिकांश *A* अथवा *O* होता है। इन दोनों की तुलना में *B* अथवा *AB* का प्रतिशत कम होता है। A_2 जीन भी कम ही होता है परन्तु *B* की तुलना में अधिक होता है। निग्रो के *ABO* रक्त-समूह में A_2 जीन औसत ही होता है तथा यह कॉकेशियाई समूह से भिन्न नहीं है। मंगोलियन में *B* जीन अधिक होता है तथा A_2 नहीं होता है। मोरैन्ट[25] के अनुसार भारत तथा अन्य देशों में रक्त वर्ग *B* का वितरण सर्वाधिक है। यह 40 के लेकर शत प्रतिशत पाया जाता है। दक्षिणी भारत, श्रीलंका, अरब, ईरान, उत्तरी अफ्रीका, स्पेन, पश्चिमी यूरोप, स्कैण्डिनेविया, हिन्देशिया, दक्षिण पूर्वी एशिया, दक्षिणी चीन, मंचूरिया, साइबेरिया, पश्चिमी अलास्का, मध्य आस्ट्रेलिया तथा अधिकांश प्रशान्त महासागरीय द्वीपों की जनसंख्या में यह 60-69 प्रतिशत पाया जाता है। *A* का प्रतिशत कुछ कम है तथा *B* का वितरण बड़ा ही अजीब सा है। कनाडा के उत्तरी ध्रुवी भाग तथा ग्रीनलैण्ड में यह 1 से 4 प्रतिशत पाया जाता है। इस प्रकार के भौगोलिक वितरण से यह आभास मिलता है कि *A* तथा *B* जीनों का वरण वातावरण से प्रभावित होता है (ब्रुश[26], व्युत्नर यानुस[27])।

गवेषणा से पता चला है कि *A* रक्त-समूह की यूरोप में प्रधानता है, *B* की एशिया में प्रधानता है, *O* की अमेरिकन इंडियन में प्रधानता है। विद्वानों का कथन है कि प्रागैतिहासिक मानव के रुधिर

में पहले-पहले सिर्फ *O* रुधिर था, बाद में *A* की उत्पत्ति पश्चिम में हुई और वहाँ से संसार के अन्य प्रदेशों में फैला। इसी प्रकार *B* एशिया में पैदा हुआ और दूसरा प्रसार एशिया से यूरोप की तरफ हुआ। भारत में *B* प्रधान रक्त है। म्युटेशन के द्वारा *O* से *A* और बाद में *B* तथा अन्य रक्त समूह प्रकट हुए। इसके द्वारा मानव रक्त में पायी गयी कुछ जेनेटिक विभिन्नताओं के भौगोलिक वर्गीकरण की विशेषताओं का वर्णन करने में सहायता मिल सकती है। यह एक प्रामाणिक सत्य है कि प्राकृतिक चयन मानव जनसंख्या एवं रोग के बीच रक्त-समूह की बारम्बारता को बनाये रखने में कार्यरत है (विलियम[28])। वोगेल तथा हेमबोल्ड[29] और चक्रवर्ती तथा वोगेल[30] ने सुझाव दिया है कि मानव जनसंख्या में *ABO* रक्त समूह के वितरण को चयन के द्वारा वर्णित किया जा सकता है जो प्लेग, चेचक और सिफिलिस जैसी महामारी के द्वारा विकसित होता है। उसके बाद यह अध्ययन होने लगा कि किसी विशेष *ABO* रक्त वर्ग में कोई निश्चित रोग है। लेकिन इस सम्बन्ध में बायोकेमिकल कारकों की भूमिका का पता नहीं चला है इसलिए रक्त वर्गों के जीनों पर चयन की प्रतिक्रिया के बारे बहुत ही कम जानकारी मिली है।

रक्त वर्ग एवं रोगों के सम्बन्ध को तीन आधारों पर दर्शाया जाता है :

(1) कोई विशेष जीन से सम्बन्धित ग्राह्यता

(2) कोई व्यक्ति और उसके माता-पिता के मिलन के बीच रोग का सम्बन्ध

(3) जातिगत बनावट।

बुचमेन तथा हीगली[31] ने मायोक्लिनिक के अध्ययन से निष्कर्ष निकाला कि *O* ग्रुप और पेपटिक अल्सर तथा *A* और परनिसियस एनीमिया के बीच सम्बन्ध है। फ्रेसर रॉबर्ट[32] ने भी बुचमेन और हीगली का ही निष्कर्ष पाया। ऐसा ही निष्कर्ष युगेली[33] एवं लेसा तथा एलेरियो[34] ने भी पाया था। बाद में एयर्ड तथा अन्य[35], क्लार्क तथा अन्य[36] एवं बुक वाल्टर तथा अन्य[37] ने इसे पुनः जाँचा और पाया कि रक्त-समूहों में विभिन्नता चयन की ही देन है। इसके साथ ही साथ माँ के गर्भ में विकृति, रोग विशेषकर छुवा-छूत एवं महामारी प्रकृति वाले भी चयण की देन है। सिदामा तथा अन्य[38] ने 300 जन्म-जात विकृत रोगियों को जाँचा पर रक्त-समूह एवं रोगियों के बीच कोई महत्वपूर्ण सम्बन्ध नहीं पाया। चक्रवर्ती तथा चक्रवर्ती[39] ने हैदराबाद के 400 चिकेन पॉक्स रोगी तथा 383 अप्रभावित सगे सम्बन्धी जनों को जाँचा और पाया कि रक्त वर्ग *A* (और सम्भवतः *AB*) में चिकेन पॉक्स अधिक होते हैं तथा महत्वपूर्ण काई वर्ग प्राप्त हुए हैं ($\chi=1.48$, $\chi^2=4.59$ $p=.05$) तथा *B* और *O* में कम। चक्रवर्ती तथा पाण्डेय[40] ने राँची के 206 बच्चे (पोलियो-82, सेरेब्रलपल्सी-54 एवं फ्लैट फीट-72) तथा 166 अप्रभावित सम्बन्धी बच्चे के *ABO*, *Rh* रक्तवर्ग तथा स्वाद प्रतिक्रिया को जाँचा और पाया कि रोगी और अप्रभावित बच्चों के बीच तथा तीनों विकलांगों के बीच किसी भी प्रकार का महत्वपूर्ण अन्तर नहीं है। पोलियो, सेरेब्रलपल्सी एवं फ्लैट फीट में *O*, *A*, *B* एवं *AB* के रोगी एवं कन्ट्रोल के बीच काई वर्ग क्रमशः 1.21, 0.34 एवं 3.39 है तथा Rh^+ एवं Rh^- के लिए काई वर्ग 0.73, 0.02 एवं 0.02 $df=1$ है।

ऊपर वर्णित तीनों आधारों को मानकर क्लार्क तथा अन्यों[41] ने ड्युडेनल अल्सर से ग्रसित सम्बन्धियों के *ABO* प्रकार का सांख्यिकीय प्रविधि द्वारा अध्ययन किया तथा रोगी और सम्बन्धियों के बीच किसी भी प्रकार का महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया। इस प्रकार यह निष्कर्ष निकाला कि रोग का सम्बन्ध किसी विशेष रक्त प्रकार से नहीं है परन्तु इसका सम्बन्ध माता के मिलन पर सम्भव है। आसबोर्न तथा डी जार्ज [42] ने *ABO* रक्त समूह एवं सैलिवरी ग्लैण्ड और ओवेरियन ट्युमर के बीच सम्बन्धों का अध्ययन किया। जारजेन सेन[43] अपने अध्ययन के दौरान पाया कि रक्त वर्ग *A* की घटना क्षय रोग एवं सारक्वायडोस्ट में क्रमशः 1.142 और 1.36 है जबकि *O* की घटना 1 है। इसी प्रकार किसी एक रक्त वर्ग की अधिकता अलकम ड्युडेनी, वेन्ट्रीकुली, डायबेटीज मेलिटस, नेफ्रोलिथिएसील, परनिसियस एनीमिया आदि में अधिक पायी जाती है। रक्त वर्ग *A* की अधिकता प्रोस्टेट एडेनोम तथा सम्भवतः डेन्टल केरीज में अधिक है। जोरजेनसेन[44] ने अपने अध्ययन में रक्त-समूह एवं रोग जैसे—विभिन्न प्रकार के ल्यूकोमिया, सोरियेसिस ब्लजरेसिस, क्लेफ्ट ओड एवं पैलेट, पाइलोरोस्पाज्म और विभिन्न प्रकार के जन्मजात हृदय रोग के बीच कोई विशेष सम्बन्ध नहीं पाया गया है लेकिन इसने पाया कि *O* ग्रुप के व्यक्ति *A* ग्रुप से तुलना में अधिक उपयुक्त है। रक्त वर्ग *O* वाले सेनेलिटी रोगी की आयु अधिक है। इन्होंने यह भी पाया कि 40 वर्ष से अधिक उम्र वाले खिलाड़ियों के गठीले शरीर *O* रक्त वर्ग वालों में अधिक है तथा बच्चों में नहीं।

इस प्रकार *AO* जेनेटाइप वाले हेटेरीजायगोटिक व्यक्तियों में जानने के लिए यह बहुत ही महत्वपूर्ण होगा तथा रक्त वर्ग एवं रोग की शोध में यह एक नई दिशा प्रदान करेगी।

मल्टीफैक्टोरियल जेनेटिक पद्धति में सम्भवतः अन्य मोनोजेनिक कारक महत्वपूर्ण हैं। इस सम्बन्ध में हेरिस तथा अन्य[45], हेरी तथा सेगल[46], चुँग तथा अन्य [47], वीगोलमन[48], चक्रवर्ती[49], सलादनहा[50], ब्रैन्ड[51] का अध्ययन क्रमशः थायरॉयड ग्लैण्ड रोग, डायबेटीज मेलिटस, डेन्टल केरीज, कुष्ठ एवं फाइलेरिया, क्षय रोग, पोलिमायोलिटिज की खोज उल्लेखनीय है।

आरफोर्स तथा अन्यों[52] ने *ABO* रक्त वर्ग एवं सीरम क्षारीय फॉस्फेट (मुख्यतः हड्डी तथा लीवर रोगों में) के बीच सम्बन्ध पाया। फॉस्फेट-1 एवं *A* ग्रुप के बीच दृढ़ सम्बन्ध पाया गया जबकि फॉसफेट-2 तथा *A* ग्रुप के बीच नगण्य रूप से सम्बन्ध पाया गया। सांख्यिकीय रूप से फॉस्फेट एवं *MN*, *Rh* तथा हेप्टोग्लोबीन कारकों के बीच सम्बन्ध नहीं पाया गया है।

सिर्वस[53] तथा हेनले[54] ने अपने अध्ययनों में पाया कि *O* ग्रुप वाले व्यक्ति में *A* ग्रुप वाले व्यक्ति की तुलना में अधिक सीरम पेप्सीनोजेन स्तर पाये जाते हैं। यह सम्भवतः क्षारीय फॉसफेट-2 में प्रभाव के कारण हो सकता है। क्षारीय फॉसफेट की खोजों ने रक्त-समूह एवं रोगों के बीच सम्बन्धों को जानने के लिए एक नई दिशा प्रदान की है।

O वर्ग विश्वव्यापी दाता क्यों है ?

यह सर्वविदित है कि *O* ग्रुप वाले व्यक्ति सार्वभौमिक दाता है। यह सम्भव है कि *A* ग्रुप वाले व्यक्ति *O* ग्रुप वाले व्यक्ति की तुलना में औसतन जैवकीय रूप से कम योग्य हों और दान करने की क्षमता भी कम हो। इस सम्बन्ध में महत्वपूर्ण खोजें हुई हैं। जोर्जेनसेन[55] ने अपने अध्ययन में पाया है कि *O* रक्त वर्ग के लिए साधारण व्यक्ति और रक्त-दाता के बीच करीब 4-5 प्रतिशत अन्तर है। बंगाल एवं बिहार में *ABO* रक्त ग्रुप एवं चेचक के बीच सम्बन्ध वाली कई खोजें हुई हैं (चक्रवर्ती तथा अन्य[56], वोगेल तथा चक्रवर्ती[57])। रक्त वर्ग *A* एवं चेचक के बीच सम्बन्ध पाया गया है। इस रोग से मरने वाले 50 प्रतिशत थे जिनमें *A* तथा *AB* रक्त ग्रुप वाले अधिक थे। वुल्फ[58] के द्वारा प्रतिपादित सूत्र रिलेटिव इंडेक्स (x) के प्रयोग से चक्रवर्ती तथा अन्यों[59] ने स्युकोमिया में *A* वर्ग का रिलेटिव इंडेक्स $A : O = 1 : 1.06$ पाया जो दर्शाता है कि *A* वर्ग में इस रोग से ग्रसित होने की सम्भावना 11 प्रतिशत अधिक है। इन्होंने *O* ग्रुप की योग्यता का अध्ययन कई आंतरिक रोगों पर किया और पाया कि *O* वर्ग *A* वर्ग की तुलना में अधिक स्वस्थ हैं।

ABO रक्त वर्ग एवं क्षय रोग

भारत में क्षय रोग एक बहुत ही आम बीमारी है जो माइकोबैक्टीरिया के द्वारा होती है। सीधु तथा अन्यों[60] के अनुसार इस देश में लगभग 8 मिलियन व्यक्ति इस रोग से ग्रसित हैं। साहा तथा बनर्जी[61] ने अपने अध्ययन में वर्णन किया है कि रक्त वर्ग एवं क्षय रोग के सम्बन्ध का सर्वप्रथम हालबर तथा हिर्सफिल्ड (1926) ने अध्ययन किया। कोठारे[62] ने क्षय रोग से ग्रसित मराठा, महर एवं मुस्लिम का अध्ययन करने पर पाया कि मुस्लिम समुदाय में प्रभावित व्यक्ति और तुलनात्मक समूह के बीच रक्त वर्ग के वितरण में कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं है जबकि रोगियों एवं तुलनात्मक समूह में रक्त वर्ग *B* के प्रतिशत में बहुत अन्तर है। सिनोय तथा दफतरी[63] ने फेफड़े वाले क्षय रोगियों तथा *ABO* रक्त-समूहों की बारम्बारताओं के बीच कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया है। बनर्जी[64] ने सिंगापुर के विभिन्न भारतीय इथनिक ग्रुपों में *ABO* तथा *Rh* रक्त-समूहों की घटनाओं का अध्ययन किया और भारतीयों के साथ कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया। भोंसले तथा कुलकरनी[65] ने भी *ABO* की घटना तथा क्षय रोगियों के बीच कोई सम्बन्ध नहीं पाया। कैम्पवेल[66] ने अपने अध्ययन में पाया कि क्षय रोग Rh^- निगेटिव पुरुष में अधिक होते हैं वनिस्पत Rh^+ पाजिटिव पुरुष के। लाहा तथा दत्ता[67] ने *O* रक्त वर्ग की बारम्बारता क्षय रोगियों में अधिक पायी है। सीधु तथा अन्यों[68] ने पटियाला के क्षय रोगियों में पाया कि *O* रक्त ग्रुप वालों में क्षय रोग की प्रवृत्ति कम है। ओवरफिल्ड तथा क्लाउवर[69] ने भी *ABO* रक्त-समूह एवं क्षय रोग के बीच कोई महत्वपूर्ण सम्बन्ध नहीं पाया है। गुप्ता तथा गुप्ता[70] ने मध्य प्रदेश में क्षय रोगियों एवं कुष्ठ रोगियों के रक्त वर्गों का सर्वेक्षण किया। जब उन्होंने क्षय रोगियों में *A*, *B*, *AB* एवं *O* की बारम्बारता की तुलना कन्ट्रोल से की तो उन्हें *AB* की बारम्बारता अधिक और *B* की बारम्बारता कम मिली। उन्होंने सुझाव किया कि क्षय रोग तथा कुष्ठ रोग के लिए पोषक कारक एक ही है जो इन रोगों की ग्रहणता के लिए कार्यशील है क्योंकि दोनों ही रोग माइकोबैक्टीरिया के द्वारा होते हैं।

सारणी 2

रक्त वर्ग	रोगी						कंट्रोल					
	पुरुष	%	महिला	%	कुल	%	पुरुष	%	महिला	%	कुल	%
O	30	30	18	22.5	48	26.6	24	24	23	23	47	23.5
A	33	33	22	27.5	55	30.5	36	36	42	42	78	39
B	26	26	27	33.7	53	29.4	30	30	19	19	49	24.5
AB	11	11	13	16.3	24	13.3	10	10	16	16	26	13.0
	100	100	80	100	180		100	100	100	100	200	100

प्रयोगात्मक

चूंकि बिहार में ऐसा कोई भी कार्य नहीं हुआ है इसी उद्देश्य को लेकर प्रस्तुत कार्य के लिए गिरिडीह जिले के विभिन्न अस्पतालों में अंकित विभिन्न प्रकार के क्षय रोगों से ग्रसित तेली जाति के 100 पुरुषों एवं 80 महिलाओं के *ABO* रक्त वर्ग को जाँचा गया है। तुलना के रोगियों के निकट सम्बन्धियों के 100 पुरुषों तथा 100 महिलाओं का भी *ABO* रक्त वर्ग जांचा गया है। रक्त वर्ग जाँचने के लिए ऐण्टी *A* एवं ऐण्टी *B* सिरा का प्रयोग किया गया। रिलेटिव इंडेक्स (x) बुल्फ[71] के द्वारा प्रतिपादित सूत्र के अनुसार निकाला गया है जैसे, $O : A$ के लिए—

$$\text{आपेक्षिक सूचकांक} = \frac{O \text{ रोगी}}{A \text{ रोगी}} \times \frac{A \text{ कंट्रोल}}{O \text{ कंट्रोल}}$$

रिलेटिव इंडेक्स

परिणाम तथा विवेचन।

सारणी-2 में क्षय रोगियों एवं कंट्रोल में *ABO* रक्त वर्ग की बारम्बारता को दर्शाया गया है तथा इसके विश्लेषण से पता चलता है कि रोगी एवं कंट्रोल दोनों में (सिर्फ महिला रोगियों को छोड़कर) ही *A* रक्त वर्ग की बारम्बारता अधिक है। महिला रोगियों में *B* ग्रुप की संख्या अधिक (33.7 प्रतिशत) है। *O* ग्रुप की संख्या पुरुष रोगियों में दूसरी तथा महिलाओं में तीसरी पायी गयी है। कंट्रोल में ठीक इसके विपरीत, महिलाओं में दूसरा तथा पुरुषों में तीसरा स्थान मिला है। *AB* ग्रुप वालों की संख्या सभी स्थिति में सबसे कम पायी गयी है।

सारणी 3

χ^2 (काई वर्ग) का मान

पुरुषों एवं महिलाओं रोगी के बीच	रोगी एवं कंट्रोल के बीच	बिहार के रोगियों तथा मध्य प्रदेश के रोगियों के बीच
3.17	4.31*	12.27*

* महत्वपूर्ण अन्तर दर्शाता है .05 पर $df=3$

क्षय रोगग्रस्त पुरुषों एवं महिलाओं के बीए, कुल रोगी एवं कन्ट्रोल के बीच तथा बिहार के तेली क्षय रोगियों और मध्य प्रदेश के क्षय रोगियों (विजय कुमार एवं अन्य[15] के द्वारा प्राप्त आँकड़े) के बीच χ^2 (काई वर्ग) निकाला गया है तथा *O, A, B* एवं *AB* रक्त वर्ग के वितरण में उक्त दोनों क्रमों के बीच महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया है (सिर्फ पुरुषों एवं महिला रोगियों को छोड़कर)।

सारणी 4

रोगियों तथा कंट्रोल के बीच आपेक्षिक सूचकांक (x) तथा काई वर्ग (χ^2)

	पुरुष		महिला		कुल	
	x	χ^2	x	χ^2	x	χ^2
$O : A$	1.36	3.3	1.49	0.95	1.49	1.8
$O : B$	1.44	0.8	0.55	2.5	0.905	0.02
$O : AB$	1.13	0.05	0.99	0.002	1.106	0.04

χ^2=कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं $df=1$

सारणी 4 रोगियों एवं कंट्रोल के बीच आपेक्षिक सूचकांक (χ) तथा काई वर्ग (χ^2) का मान निकाला गया है। आपेक्षिक सूचकांक के सबसे अधिक और सबसे कम मान क्रमश: 1.49 और 0.55 महिलाओं में $O : A$ तथा $O : B$ के बीच पाया गया है। पुरुषों में सबसे अधिक मान $O : A$ के बीच (1.44) मिला है। चक्रवर्ती तथा अन्य [59] ने अपने अध्ययन में क्षय रोगियों में $A : O$ के बीच आपेक्षिक सूचकांक का मान 1.15 पाया है। काई वर्ग के मान में किसी भी स्थिति में कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं मिला है।

सारणी 5

विभिन्न प्रकार के क्षय रोगियों में ABO रक्त वर्ग की वारम्बारता

	O		A		B		AB	
क्षय रोग	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला	पुरुष	महिला
पलमोनरी	12	8	20	8	10	10	1	3
लिम्फोडेनिटिस	4	4	8	7	12	6	6	3
मेनजायटिस	6	2	1	3	4	8	1	4
ऑसटियोमायलिटिस	5	2	1	2	—	2	2	—
स्पाइन	3	2	3	2	—	1	1	—
	30	18	33	22	26	27	11	13

सारणी 5 से पता चलता है कि *A* ग्रुप वाले पुरुषों में पल्मोनरी प्रकार के क्षय रोग सबसे अधिक है तथा *O* ग्रुप वाले पुरुष दूसरी संख्या में आते हैं। *B* ग्रुप में पुरुषों तथा महिलाओं की संख्या बराबर है। तथा *AB* ग्रुप में महिला रोगियों की संख्या अधिक है। लिम्फोडेनिटिस केस में *A, B* एवं *AB* ग्रुप में पुरुष रोगियों की संख्या महिला रोगियों से अधिक है तथा *O* ग्रुप में दोनों की संख्या है। *A, B* एवं *AB* ग्रुप में मेनिन्जायटिस महिला रोगी अधिक है सिर्फ *O* ग्रुप में मेनिन्जायटिस पुरुष अधिक है। अन्य दोनों रोगियों की स्थिति कम तथा लगभग समान है।

ABO रक्त वर्ग एवं रोगों के बीच सम्बन्ध पर सारे विश्व से शोध कार्य प्रकाशित हुए हैं। यद्यपि यह अभी भी अनिर्णित है फिर भी मानव स्वास्थ्य के लिए अति महत्वपूर्ण है। माउरेण्ट तथा अन्य[74] ने विश्व के आँकड़ों को संग्रह करने पर पाया गया कि *A* तथा *O* रक्त वर्ग वाले क्षय रोगियों की बारम्बारता अधिक है।

सारणी 6

ABO रक्त वर्ग एवं क्षय रोग के बीच सम्बन्ध पर भारतीय अध्ययन

क्षेत्र	नं०	*O*	*A*	*B*	*AB*	स्रोत
बम्बई रो०	152	42	35	54	20	[62]
(महर) क०	325	100	83	116	26	"
बम्बई रो०	284	93	78	86	27	"
(मुस्लिम) क०	534	185	162	131	56	
बम्बई रो०	66	23	26	11	6	
(व्यवसायी) क०	180	56	61	52	11	
बम्बई रो०	360	123	100	112	25	
क०	760	244	195	262	59	[63]
कानपुर रो०	1000	374	204	300	122	
क०	820	272	203	280	65	[72]
भारतीय रो०	360	100	112	123	25	
क० I	760	192	262	244	95	[63]
क० II	1834	422	505	747	160	

ग्वालियर रो०	300	142	47	81	30	[67]
क०	500	157	114	194	35	
लखनऊ रो०	[illegible]	7	[illegible]	[illegible]	8	[73]
क०	3330	1035	753	1263	279	
ग्वालिय रो०	400	130	93	133	44	[74]
क०	4720	1461	1129	1711	419	
भारतीय रो०	116	46	28	30	12	[61]
(सिंगापुर) क०	3920	1951	1051	1680	318	
जयपुर रो०	1600	460	308	576	256	[75]
क०	3799	1300	879	1346	274	
पटियाला रो०	500	138	112	179	53	[60]
क०	6204	1912	1373	2382	537	
पूना रो०	50	13	18	17	2	[75]
क०	878	285	266	260	67	
छत्तीसगढ़ रो०	117	38	18	33	28	
क०	100	31	22	27	19	[15]
बिहार रो०	180	48	55	53	24	प्रस्तुत अध्यन
तेली जाति क०	200	47	78	49	26	

रो०=रोगी, क०=कंट्रोल

भारत में क्षय रोग त्रुटिपूर्ण संयोजन पैटर्न के रूप में पाया जाता है। किसी निश्चित रक्त वर्ग एवं रोग के बीच सम्बन्ध के लिए कार्यात्मक व्याख्या की आवश्यकता है जिससे मानव के स्वास्थ्य को बचाया तथा उन्नत किया जा सके। सारणी 6 में *ABO* रक्त वर्ग एवं क्षय रोग पर किये गये कार्य को दर्शाया गया है। सारणी में दिये गये आंकड़ों का क्षेत्रीयता के आधार पर प्रतिशत निकालने परपता चलता है कि बिहार की तेली जाति में *O* ग्रुप वाले व्यक्तियों में क्षय रोग अन्य सभी क्षेत्रों से कम (26.6%) है तथा ग्वालियर क्षेत्र में *O* ग्रुप वाले क्षय रोगियों की बारम्बारता सबसे अधिक (47.3

प्रतिशत) है। पंजाब क्षेत्र में 43.1 प्रतिशत रोगी *O* ग्रुप वाले हैं। अत: बिहार में विशेषकर तेली जाति में *O* ग्रुप वाले स्वस्थ्य है और बुढ़ापे तक जीवित रह सकते हैं।

निर्देश

1. एलेक्जेन्डर, डब्ल्यू०, ब्रिट० जर० एक्स० पारहोल, 1921, 1, 2, 66
2. एयर्ड, आई० तथा एच० एच० वेन्टाल, ब्रिट० मेडि० जर०, 1953, 799-807
3. एयर्ड, आई०, एच० एच० वेन्टाल तथा जे० ए० एफ० रॉबर्ट, ब्रि० मेडि० जर०, 1953, 799
4. एयर्ड, आई०, एच० एच० वेन्टाल तथा जे० बिंघम, ब्रिट० मेडि० जर०, 1956, 2, 273
5. क्रिगर, डब्ल्यू० पी० तथा ए० टी० सार्टर, आर्क० इट० मेड०, 1956, 98, 136
6. ब्युत्नर-यानूस, जे०, जॉ० विली० स०, न्युयार्क 1967
7. अहमद, एस०, एन्थ्रो० 1964, 8, 33-39
8. अहमद, एस०, ईन० जर० ऑफ चेस्ट० डिस०, 1964, 6, (2), 74-89
9. अहमद, एस०, एक्टा जेने० मेड० (रोम), 1964, 13, 2
10. चक्रवर्ती, एम० आर० तथा आर० चक्रवर्ती, एक्टा जेने० मेड० (रोम), 1977, 26, 297-298
11. धर्मराजु, एम०, सी० लक्ष्मी तथा आई० एम० रॉदरिक, आई० सी० एम० आर० 1971, 205-16
12. रामचन्द्रिया, टी०, के० सुब्रमनियम, के० वी० रामलक्ष्मी तथा बी० सेकसनी, मेडि० जर्न० ईन० इन्डि०, 1978, 2, 1. C, 241-247
13. चक्रवर्ती, एम० आर०, ह्यू० जेने० 1966, 3
14. चक्रवर्ती, आर० तथा एस० पाण्डेय, मैन इन इंडि०, 1982, 62 (4)
15. विजय कुमार, पी०, एम० मिश्रा तथा सी० एस० सिंगरोल, मोडर्न ट्रेन्ड इन एन्थ्रो० 1989, 149-53
16. क्लार्क, सी० ए०, डब्ल्यू० के० कोबन, जे० एडवार्ड, ए० डब्ल्यू० होवेल-इवान्स, आर० बी० मैककोनन, जे० सी० उड्रो तथा पी० एम० सेपर्ड, ब्रिट० मे० जन० 1955, 2, 643
17. क्लार्क, सी० ए०, प्रो० मेडि० जेने० 1961, 1, 81-119

18. क्लार्क, सी० ए०, जे० डब्ल्यू०, एडवार्ड, डी० आर० हैडोक, ए० डब्ल्यू० होवेल-इवान्स, आर० बी० मैककोनेन तथा पी० एम० सेपार्ड, ब्रिट० मे० जर० 1956, **1**, 725-731

19. क्लार्क, सी० ए०, आर० बी० मैककोनेन तथा पी० एम० सेपार्ड, ब्रिट० मे०जर० 1960, **1** 21-23

20. वोगेल, एफ० तथा डब्ल्यू० हेलबोल्ड, कुर० है० ह्यू० 1972, 1/4

21. चक्रवर्ती, एम० आर०, एन्थ्रो० इन इंडि० 1972

22. जॉर्जेनसेन, जी०, ह्यू० जेने० 1972, **15**, 227-231

23. चक्रवर्ती, आर० तथा एम० आर० चक्रवर्ती, इंडि० एन्थ्रो० 1979, **9**, 531-58

24. वाइनर, ए० एस०, अमे० जन० फि० एन्थ्रो० 1948, **6**, 236-237

25. मोरैन्ट, जी०, अन्न० यू० जे० 1927-**2**. 318

26. ब्रुस० ए० एम०, अमे० जर० फि० एन्थ्रो० 1954, **12**, 552

27. व्युत्नर-यानूस, जे० अमे० एन्थ्रो० 1959, **61**, 437

28. विलियम, बी० जे०, ईवोल्यूशन ऑफ ह्मे० ओरि० 1963

29. वोगेल, एफ०, एच० जे० पैटेनकोफर तथा ड्ब्ल्यू० हेमवोल्ड, एक्टा चेने० 1960, **10**, 267-294

30. चक्रवर्ती, एम० आर० तथा एफ० वोगेल, ईन० एन्थ्रो० सो० 1967, **1**, 119-123

31. बुचनन, जे० ए० तथा ई० टी० हिगली, ब्रिट० ज० एक्स० पैथ, 1921, **2**, 247

32. राबर्ट, जे० ए० एफ०, ब्रिट० ज० प्रेम० सो० मेडि० 1957, **11**, 107-125

33. युगेली, एल०, से० प्राट० 1936, **43**, 1951-1594

34. लेशा, ए० तथा जे० एलेरियो, हेमा० 1949, **2**, 1-32

35. एयर्ड, आई० तथा एच० एच० वेन्टाल, ब्रिट० मेडि० ज० 1953, **1**, 799-807

36. क्लार्क, सी० ए०, डब्ल्यू० के० कोवन, जे० एडवार्ड, ए० होवेल-इयान्स, आर० बी० मेककोनन, जे० सी० वुड्रो तथा पी० एम० सेपर्ड, ब्रिट० मे० ज० 1954, **2**, 643

37. बुकवाल्टर, जे० ए०, ई० बी० बोलवेन्ट, डी० सी० कोटर, आर० टी० टिड्रिक एवं आई० ए० नोलर, अमे० मेडि० आस०, 1956, **162**, 1210-1214

38. सिदामा, के० सी० एवं अन्य, ईन० ज० मेडि० साइ० 1970, **24**, 44

39. चक्रवर्ती, एम० आर० एवं आर० चक्रवर्ती, एक्टा० जेने० मेड०, 1977, **26**, 297-298

40. चक्रवर्ती, आर० एवं एस० पाण्डेय, मैन इन० इडि० 1982, **62**, N. 4

41. क्लार्क, सी० ए० .... क्रमांक 18 जैसा

42. ऑसबोर्न, आर० एच० एवं डी० जॉर्ज, अमे० ज० फि० अन्थ्रो० 1963

43. जार्जेन सेन जी० ह्यूमे० जेने० 1967, 3, 264-268

44. जार्जेन सेन, जी०, वही

45. हेरिस, एच०, एच० कलमुस तथा डब्ल्यू० आर० ट्रोटर लैनसेट, 1949, II, 1039

46. टेरी, एम० सी० तथा जी० केगल, ज० हेरेड, 1947, **38**, 135

47. चुंग, सी० एस०, सी० जे० बिटकोप तथा जे० एल० हेनरी, अमे० ज० ह्यू० जेने० 1964, **16**, 231

48. बीगोलमन, बी०, एक्टा० जेने० मेड० गुरे० रोमा० 1964, **13**, 135

49 चक्रवर्ती, एम० आर०, लेष० रेम०, 1970

50. सलदनहा, पी० एच०, लेनसेट, 1956, II, 74

51. ब्रैन्ड, एन०, अन्न० हू० जेने० 9963, **26**, 321

52. ऑसबोर्न, आर० एच० इत्यादि क्रमांक 42 जैसा

53. सिभर्स, एम० एल०, अम० जर० मेड० 1959, **27**, 24

54. हेनले, डब्ल्यू० बी०, ब्रिट० मेड० जर०, 1964, 7, 936

55. जार्जेनसेन, जी०, यूरो० मेडि०, 1974, 15

56. चक्रवर्ती, एम० आर०, बी० के० वर्मा, टी० बी० हनु तथा एफ० भोगेल, ह्यू० जेने० 1966, 2

57. वोगेल, एभ० तथा एम० आर० चक्रवर्ती, ह्यू० जेने० 1966, 3

58. वुल्फ, बी०, अन्न ह्यू० जेने० 1955, 19

59, चक्रवर्ती, आर० तथा एम० आर० चक्रवर्ती, ईन० एन्थ्रो० 1979, **9(1)**, 53-58

60. सीधु, एल० एस०, जे० सिंह, डी० पी० भटनागर तथा जे० के० आहूजा, ह्यूमे० पो० जे० ईन० 1944

61. साहा, एन० तथा बी० बनर्जी, ज० मेडि० जेने० 1968, **5**, 306

62. कोठारे, एस० एन०, ज० पो० मेड० 1959, 5, 94-98

63. सिनोय, एस० ए० तथा वी० जी० दफ्तरी, ईन० जर० मेडि० साइ० 1962, **16**, 493-498

64. साहा, एन० तथा वी० बनर्जी, ज० मेडि० जेने० 1968, 5, 306

65. भोसले, एन० तथा बी० एस० कुलकरनी, दी एन्थ्रो० 1976, **23** (1&2), 44-48

66. कैम्पवेल, ए० ई०, टूबेर० 1956, **37**, 88

67. लाहा, पी० एन० तथा एम० सी० दत्ता, ज० आस० फिजि० ईन० 1963, **11**, 287-291

68. सीधु, एल० एस० तथा अन्य ...... क्रमांक **60** जैसा

69. ओमरफिल्ड, टी० तथा सी० क्लाउवर, ह्यू० बाय० 1980, **52**, 87

70. गुप्ता, एम० सी० तथा एस० आर० गुप्ता ईन० ज० मेड० साइ० 1966, **20**, 353-456

71. बुल्फ, बी०, अन्न० ह्यू० जेने० 1955, 19

72. नवानी, एच० तथा आर० के० नवरंग, ईन० ज० चेस्ट डिजि०, 1962, **4**, 109-113

73. नाथ, के०, जे० जी० जौली तथा एस० के० प्रसार, जर० आस० फिजि० ईन०, 1963, **11**, 667-674

74. गुप्ता, एस० आर० तथा एम० सी० गुप्ता, ईन० ज० डेम० 1966, **11**, 49-50

75. जैन, आर० सी०, ट्यूबरकिल, 1970, **51**, 322-323

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

फाक्स H-फलन द्वारा वायुमण्डल दाब का निर्धारण

अशोक कुमार रोंघे
सेठ शिताबराय लक्ष्मीचन्द्र जैन कनिष्ठ महाविद्यालय, विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 17, 1992]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में हमने फाक्स H-फलन का प्रयोग वायुमण्डल दाब ज्ञात करने में किया है। इस सूत्र को प्राप्त करने के लिए हम बॉयल के नियम का प्रयोग करेंगे।

Abstract

Determination the atmospheric pressure by Fox's H-function. *By* Ashok Kumar Ronghe, Seth Shitabrai Laxmi Chand Jain Kanishtha Mahavidyalya, Vidisha (M. P.).

In this research paper, we obtain the atmospheric pressure by Fox's H-function. To obtain this formula we will use Boyle's law.

1. प्रस्तावना

फाक्स[2] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं

$$H_{p,q}^{M,N}\left[z \left| \begin{matrix} ((a_j, \alpha_j)) \\ ((b_j, \beta_j)) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \theta(z)\, z^s \, ds. \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{M} \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^{N} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\prod_{j=M+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=N+1}^{p} \Gamma(a_j - \alpha_j s)} \tag{1.2}$$

रिक्त गुणनफल है जिसे इकाई मान लिया गया है,

$1 \leqslant M > q$, $0 \leqslant N \leqslant p$ एवं प्राचल ऐसे है कि $\Gamma(b_j - \beta_j s)$, $j = (1, 2, \ldots, M)$ के पोल $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)$, $(j = 1, \ldots, N)$ के संतापी है तथा L एक उपयुक्त कंटूर है। ब्राक्समा[1] ने यह सिद्ध किया कि समाकलन (1.1) परम अभिसारी है। जब

$$\theta > 0,\ |\arg (z)| < \tfrac{1}{2}\,\theta\pi,$$

जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j + \sum_{j=1}^{M} \beta_j - \sum_{j=M+1}^{p} \alpha_j - \sum_{j=N+1}^{q} \beta_j, \tag{1.3}$$

2. वायुमण्डल दाब को प्रदर्शित करने वाला मुख्य सूत्र जो कि H-फलन के रूप में दर्शाया गया है—

$$H^{M,\,N+1}_{p+1,\ q+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (p; p_1), ((a_j, \alpha_j)) \\ ((b_j, \beta_j)), ((1-p; p_1)) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{-g}{k}\, H^{M+1,\,N}_{p+1,\ q+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} ((a_j, \alpha_j)), (-h; h_1) \\ (h; h_1), ((b_j, \beta_j)) \end{matrix} \right] + c$$

यह सूत्र निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है—

$$h > h_1,\ p > p_1,\ |\arg (z)| < \tfrac{1}{2}\,\theta\pi,$$

$$Re\,[h - h_1(a_j/\alpha_j)] > 0,\ Re[p + p_1(a_j/\alpha_j)] > 0,$$

3. सूत्र की उपपत्ति

माना कि समुद्र तल से H ऊँचाई पर दाब p है और $(h \pm \delta h)$ ऊँचाई पर दाब $(p \pm \delta p)$ है। माना कि वायु का घनत्व w है, तब

$$p = p \pm \delta p + gw\,\delta h$$

दोनों ओर सीमाओं के अन्तर्गत निम्न अवकलन समीकरण प्राप्त होता है जो कि वायुमण्डल दाब को प्रदर्शित करता है।

$$\frac{dp}{dh} = -gw \tag{1}$$

अब बॉयल के नियम के अनुसार स्थिर ताप पर,

$$p = kw \tag{2}$$

w का मान समी० (2) से (1) में रखने पर

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k}\, dh \tag{3}$$

समी० (3) को समाकलित करने पर [3.p.454]

$$\int \frac{1}{p} \cdot dp = -\frac{g}{k} \cdot \int 1 \cdot dh$$

$$\int \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1+p)}\, dp = -\frac{g}{k} \cdot h + c = -\frac{g}{k} \frac{\Gamma h+1}{\Gamma h} + c \tag{4}$$

समुद्र तल के लिए $h=0$, $p=p_0$ रखने पर c का मान ज्ञात कर सकते हैं, पुनः (4) में $p=p+p_1 s$, $h=h-h_1 s$ रखने पर [4, p. 44] [क्योंकि जैसे ऊँचाई बढ़ती जायेगी दाब का मान कम होता जाता है] तथा दोनों ओर $(2\pi i)^{-1}\, \theta(s)\, z^s$ का गुणा करने पर तथा कंटूर L की दिशा में S के प्रति समाकलित करने पर और (1.1) का सम प्रयोग करने पर हमें प्रमुख सूत्र की प्राप्ति होती है।

निर्देश

1. बाक्समा, बी० एल० जे०, काम्पोसिट मैथ०, 1918, **15**, 294-341
2. फाक्स० सी०, ट्रांजै अमे० सोसा० 1961, **98**, 395-421
3. ग्रेवाल, बी० एम०, हायर इंजीनियरिंग मैथ०, 1978, 454-455
4. रोंघे, ऐ० के०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1992, **35**, 43-46

Vijana Parishad Anusandhan patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

अष्टि के रूप में दो चरों वाले H-फलन के समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

वी० सी० नायर तथा टी० एम० वासुदेवन नम्बिसन
गणित विभाग, रीजनल इन्जीनियरी कालेज, कालीकट (केरल)

[प्राप्त—नवम्बर 12, 1992]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य संवलन स्वरूप वाले समाकल समीकरण को हल करना है जिसकी अष्टि दो चरों वाला H-फलन है।

Abstract

Inversion of an integral equation with the H-function of two variables as its kernel. *By* V. C. Nair, Head of the Department of Mathematics, Regional Engineering College, Calicut-673601, and T. M. Vasudevan Nambisan, Department of Mathematics, N. A. S. College, Kanhangad.

The object of this paper is to solve an integral equation of convolution form having the H-function of two variables as its kernel. It generalizes results given by Nair ([6], p. 272, [5], p. 11). A few other special cases are also given.

1. परिभाषायें तथा प्रयुक्त परिणाम

लैप्लास परिवर्त

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re(p)>0 \tag{1.1}$$

को $F(p) \doteqdot f(t)$ द्वारा प्रदर्शित किया है।

एर्डेल्यी ([1], pp. 129-131)

यदि $f(t)=F(p)$, तो $e^{-at} f(t) \doteq F(p+a)$. (1.1)

यदि $f(t)=F(p), f(0)=f'(0)=\ldots\ldots$

$$=f^{(n-1)}(0)=0 \text{ तथा } f^{(n)}(t) \text{ संतत है}$$

तो

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p). \tag{1.3}$$

यदि

$$f_1(t) \doteq F_1(p) \text{ तथा } f_2(t \doteq F_2(p),$$

तो

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\, du \doteq F_1(p) F_2(p). \tag{1.4}$$

नायर ([4], p. 59, (1.10))

$$t^h H_{1,2}^{1,1}\left[ztk \left| \begin{matrix} (1-\nu, 1 \\ (0, 1), (-h, k) \end{matrix}\right.\right] \doteq p^{-1-h}(1+z\,p^{-k})^{-\nu}\, \Gamma(\nu), \tag{1.5}$$

बशर्ते

$$Re(p)>0,\ 2>k>0,\ Re(1+h)>0,$$

$$|\arg z\,p^{-k}| < \frac{\pi}{2}(2-k)$$

मुहम्मद ([3], p. 109)

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} H_{p,q}^{m,n}\left[z_1 x^{\lambda} \left| \begin{matrix} ((c_p, c_p)) \\ ((d_q, D_q)) \end{matrix}\right.\right]$$

$$H_{u,v}^{g,h}\left[z_2 (1-x)^h \left| \begin{matrix} ((e_u, E_u)) \\ ((f_v, F_v) \end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=H_{0,1:p+1,q;u+1,v}^{0,0:m,n+1;g,h+1}\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \\ (1-\alpha-\beta;\lambda,\mu): \end{matrix} \begin{matrix} :(1-\alpha,\lambda),((c_p,C_p)); \\ ((d_q,D_q)); \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left. \begin{matrix} (1-\beta,\mu),((e_u,E_u)) \\ ((d_q,D_q)\} \end{matrix}\right], \tag{1.6}$$

बशर्ते

$$Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,\ \lambda,\mu>0,$$

$$Re\left(\alpha+\lambda\frac{d_j}{D_j}\right)>0,\ Re\left(\beta+\mu\frac{f_k}{F_k}\right)>0,\ (j=1,2,\ldots,m,\ k=1,2,\ldots,g)$$

$$|\arg z_1| < \tfrac{1}{2}\pi\Delta_1,\ |\arg z_2| < \tfrac{1}{2}\pi\Delta_2,\ \Delta_1,\Delta_2>0$$

$$\Delta_1=\sum_1^m D_j-\sum_{m+1}^q D_j+\sum_1^n C_j-\sum_{n+1}^p C_j,$$

$$\Delta_2 = \sum_{1}^{g} F_j - \sum_{g+1}^{v} F_j + \sum_{1}^{h} E_j - \sum_{h+1}^{u} E_j.$$

2. समाकल समीकरण

प्रमेय : निम्नलिखित समाकल समीकरणों

$$g(t) = A \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^r}{r!} \int_0^t [(D+a_1)^{m_1} (D+a_2)^{m_2} f(u)]\, e^{-(a_r+a_2)(t-u)} \times$$

$$(t-u)^{r+h_1+h_2+1}\, H^{0,\,0\,:\,1,\,2,\,1,\,1}_{0,\,1\,:\,2,\,2,\,1,\,1} \left[\begin{matrix} z_1(t-u)^{k_1} \\ z_2(t-u)^{k_2} \end{matrix} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots\ldots & : (-r-h_1, k_1), (1-\nu_1, 1); (2-\nu_2, 1) \\ (-r-h_1-h_2-1, k_1, k_2 : (0, 1) & (-h_1, k_1); \quad (0, 1) \end{matrix} \right] du \qquad (2.1)$$

तथा

$$f(t) = B \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r_2^r}{r!} \int_0^t [(D+a_1)^{n_1} (D+a_2)^{n_2} g(u)]\, e^{-(a_1+a_2)} {}^{(t-u)r+h'_1+h_2+1} \times$$

$$H^{0,\,0\,:\,1,\,2;\,1,\,1}_{0,\,1\,:\,2,\,2;\,1,\,1} \left[\begin{matrix} z_1\,(t-u)^{k_1} \\ z_2\,(t-u)^{k_2} \end{matrix} \right| (-r-h'_1-h'_2-1; k_1, k_2)$$

$$\left. \begin{matrix} : (-r-h'_1, k'_1), (1+\nu_1, 1); (1+\nu_2, 1) \\ : (0, 1), (-h'_1, k_1); \quad (0, 1) \end{matrix} \right] du \qquad (2.2)$$

में से प्रत्येक समीकरण दूसरे का हल है बशर्ते

m_1, m_2, n_1 तथा अनृण पूर्णांक है—

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m_1-1)}(0) = 0, f^{(m_1)}(t) \qquad (2.4)$$

संतत है

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m_2-1)}(0) = 0, f^{(m_2)}(t) \qquad (2.5)$$

संतत है

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n_1-1)}(0) = 0, g^{(n_1)}(t) \qquad (2.6)$$

संतत है

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n_2-1)}(0) = 0, g^{(n_2}(t) \qquad (2.7)$$

संतत है

$$h'_1 = m_1 + n_1 - h_1 - 2,\; h'_2 = m_2 + n_2 - h_2 - 2 \qquad (2.8)$$

D प्रदर्शित करता है u के प्रति अवकलन का (2.9)

$$A\, B\, \Gamma(\nu_1)\, \Gamma(\nu_2)\, \Gamma(-\nu_1)\, \Gamma(-\nu_2) = 1,\; 2 > k_1 > 0,\; 2 > k_2 > 0,$$

$$Re(2\ldots + h_1 + h_2) > 0,\; Re(2\ldots + h'_1 + h'_2) > 0,\; Re(1+h_1) > 0,\; Re(1+h'_1) > 0,$$

$$| \arg z_1 p^{-k_1} | < \frac{\pi}{2} (2-k_1) \text{ तथा } | \arg z_2 p^{-k_2} | < \frac{\pi}{2} (2-k_2). \quad (2.10)$$

उपपत्ति : माना

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ and } g(t) \doteqdot G(p).$$

(1.2) तथा (1.5) का उपयोग करते हुए

$$e^{-at} t^h H^{1,1}_{1,2}\left[zt^k \middle| \begin{matrix}(1-v, 1\\(0, 1), (-h, k)\end{matrix}\right] \doteqdot (p+a)^{-1-h} [1+z(p+a)^{-k}]^{-v} \Gamma(v). \quad (2.11)$$

(1.5) तथा (2.11) में (1.4) का प्रयोग करते हुए

$$[\Gamma((v_1) p^{-1-h_1} [1+z_1 p^{-k_1}]^{-v_1}] [\Gamma(v_2) (p+a_2)^{-1-h_2} [1+z_2 (p+a_2)^{-k_2}]^{-v_2}]$$

$$\doteqdot \int_0^t u^{h_1} H^{1,1}_{1,2}\left[z_1 u^{k_1} \middle| \begin{matrix}(1-v_1, 1)\\(0, 1), (-h_1, k_1)\end{matrix}\right] e^{-a_2(t-u)} (t-u)^{h_2} \times$$

$$H^{1,1}_{1,2}\left[z_2 (t-u)^{k_3} \middle| \begin{matrix}(1-v_1, 1)\\(0, 1), (-h_1, k_1)\end{matrix}\right] dn. \quad (2.12)$$

दक्षिण पक्ष

$$= e^{-a_2 t} \int_0^t u^{h_1} H^{1,1}_{1,2}\left[z_1 u^{k_1} \middle| \begin{matrix}(1-v_1, 1)\\(0, 1), (-h_1, k_1)\end{matrix}\right] e^{a_2 u} (t-u)^{h_2} \times$$

$$H^{1,1}_{1,2}\left[z_2 (t-u)^{k_2} \middle| \begin{matrix}(1-v_2, 1)\\(0, 1), (-h_2, k_2)\end{matrix}\right] du. \quad (2.13)$$

अब $e^{a_2 u}$ का विस्तार करें तो (2.13) को निम्न रूप में पाने के लिए $u=tv$ रखें ।

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^r}{r!} e^{-a_2 t} t^{r+h_1+h_2+1} \int_0^1 v^{h_1+r} (1-v)^{h_2}$$

$$H^{1,1}_{1,2}\left[z_1 t^{k_1} v^{k_1} \middle| \begin{matrix}(1-v_1, 1)\\(0, 1), (h_1, k_1)\end{matrix}\right] \times$$

$$H^{1,1}_{1,2}\left[z_2 t^{k_2} (1-v)^{k_2} \middle| \begin{matrix}(1-v_2, 1)\\(0, 1), (-h_2, k_2)\end{matrix}\right] dv. \quad (2.14)$$

(1.6) का प्रयोग करते हुए (2.14) का मान निकालें

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^r}{r!} e^{-a_2 t} t^{r+h_1+h_2+1}$$

$$H_{0,\,1\,:\,2,\,2;\,1,\,1}^{0,\,0\,:\,1,\,2;\,1,\,1}\left[\begin{matrix} z_1\, t^{k_1} \\ z_2\, t^{k_2}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} : \\ (-r-h_1-h_2-1;\, k_1,\, k_2):\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(-r-h_1,\, k_1),\ 1-v_1,\, 1);\ (1-v_2,\, 1) \\ (0,\, 1),\quad (-h_1,\, k_1);\quad (0,\, 1)\end{matrix}\right]. \tag{2.15}$$

(1.2) तथा (2.15) का उपयोग करने पर

$$\Gamma(v_1)\,(p+a_1)^{-1-h_1}\,[1+z_1\,(p+a_1)^{-k_1}]^{-v_1}\,\Gamma(v_2)\,(p+a_3)^{-1-h_2}\,[1+z_2\,(p+a_3)^{-k_2}]^{-v_2}$$

$$\doteqdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^{\,r}}{r!}\, e^{-(a_1+a_2)t}\; t^{r+h_1+h_2+1}$$

$$H_{0,\,1\,:\,2,\,2;\,1,\,1}^{0,\,0\,:\,1,\,2:\,1,\,1}\left[\begin{matrix} z_1\, t^{k_1} \\ z_2\, t^{k_2}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} : \\ (-r-h_1-h_2-1;\, k_1,\, k_2):\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(-r-h_1,\, k_1),\, (1-v_1,\, 1);\, (1-v_2,\, 1) \\ (0,\, 1),\, (-h_1,\, k_1);\, (0,\, 1)\end{matrix}\right]. \tag{2.16}$$

जहाँ

$$a_3 = a_1 + a_2.$$

(1.4) तथा (2.16), उपयोग करने पर समाकल समीकरण (2.1) हो जाता है—

$$G(p) = A(p+a_1)^{m_1-1-h_1}\,(p+a_3)^{m_2-1-h_2}\,F(p)\,[1+z_1\,(p+a_1)^{-k_1}]^{-v_1}\times$$

$$[1+z_2\,(p+a_3)^{-k_2}]^{-v_2}\,\Gamma(v_1)\,\Gamma(v_2). \tag{2.17}$$

इसी प्रकार समाकल समीकरण (2.3) बन जाता है—

$$F(p) = B(p+a_1)^{n_1-1-h'_1}\,(p+a_3)^{n_2-1-h'_2}\,G(p)\,[1+z_1\,(p+a_1)^{-k_1}]^{v_1}\times$$

$$[1+z_2\,(p+a_3)^{-k_2}]^{v_2}\,\Gamma(-v_1)\,\Gamma(-v_2). \tag{2.18}$$

जहाँ

$$a_3 = a_1 + a_2.$$

समीकरण (2.17) एवं (2.18) एक दूसरे से प्राप्त किया जा सकता है जब

$$AB\Gamma(v_1)\,\Gamma(v_2)\,\Gamma(-v_1)\,\Gamma(-v_2) = 1.\ h'_1 = m_1 + n_1 - h_1 - 2$$

तथा

$$h'_2 = m_2 + n_2 - h_2 - 2.$$

अतः लर्च के प्रमेय [(2), p. 5)] द्वारा यह निकलता है कि (2.1) तथा (2.2) में से प्रत्येक समाकल समीकरण एक दूसरे का हल है।

विशिष्ट दशायें : $k_2=1$, रखें तथा प्रमेय में $z_2 \to 0$ रखें जिससे निम्नलिखित परिणाम मिले : समाकल समीकरणों में प्रत्येक

$$g(t)=A \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^r}{r!} \int_0^t [(D+a_1)^{m_1} (D+a_2)^{m_2} f(u)]\, e^{-(a_1+a_2)(t-u)} (t-u)^{r+h_1+h_2+1} \times$$

$$H_{2,1}^{1,2}\left[z_1 (t-u)^{k_3} \left| \begin{matrix} (-r-h, k_1) \quad (1-v_1, 1) \\ (0, 1), (-h_1, k_1), (-r-h_1-h_2-1, k_1) \end{matrix} \right.\right] dv$$

तथा

$$f(t)=B \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^r}{r!} \int_0^t (D+a_1)^{n_1} (D+a_2)^{n_2} g(u)\, e^{-(a_1+a_2)(t-u)} (t-u)^{r+h'_1+h'_2+1} \times$$

$$H_{2,3}^{1,2}\left[z_1 (t-u)^{k_1} \left| \begin{matrix} (-r-h'_1, k_1), (1+v_1, 1 \\ (0, 1), (-h'_1, k_1) (-r-h'_1-h'_2-1, k_1) \end{matrix} \right.\right] du. \qquad (2.19)$$

हल हैं दूसरे का बशर्ते कि प्रमेय के (2.3) से (2.9) तक के प्रतिबन्ध

$$Re(2+h_1+h_2)>0,\ Re(2+h'_1+h'_2)>0,\ Re(1-h_1)>0,\ Re(1+h'_1)>0,$$

$$AB\Gamma(v_1)\,\Gamma(-v_1)=1,\ 2>k_1>0,\ |\arg z_1 p^{-k_1}|<\frac{\pi}{2}\ (2-k_1),$$

तुष्ट हो जायें।

(2.19) में

$$m_2=n_2=0,\ a_1=a,\ m_1=m,\ n_1=n,\ z_1=-z \text{ तथा } h_2=-1 \text{ माना } a_2 \to 0$$

रखने पर तथा [(7], p. 19, (2.6.11)) का प्रयोग करने पर नायर द्वारा स्थापित प्रमेय [5, p. 11] प्राप्त की जा सकती है।

(2.19) में

$$k_1=1,\ m_1=n_1=a_1=0,\ a_2=a,\ m_2 \ldots m,\ n_2=n;\ z_1=-z,$$

रखें तथा [(7], p. 18, (2.6.3)) का प्रयोग करें और प्राचलों का पुन: नामकरण करें जिससे

$$g(t)=A \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \int_0^t [D(+a)^m f(u)]\, e^{-a(t-u)} (t-u)^{s+r-1}$$

$${}_2F_2\left[\begin{matrix} a+r, \beta \\ \gamma, s+r; z(t-u) \end{matrix}\right] \Gamma(\alpha+r)\, [\Gamma(s+r)]^{-1}\, du$$

प्राप्त हो तथा

$$f(t)=B\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^r}{r!}\int_0^t [(D+a)^n g(u)]\, e^{-a(t-u)}\,(t-u)^{s_1+r-1}\,\Gamma(\alpha_1+r)\,[\Gamma(s_1+r)]^{-1}$$

$$_2F_2\left[\begin{matrix}\alpha_1+r,\ -\beta\\ \gamma_1,\ s_1+r\end{matrix},\ z(t-u)\right]du$$

दूसरे का हल है बशर्ते कि m, n अनृण पूर्णांक हैं

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0,\ f^{(m)}(t)$$

संतत है,

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(n-1)}(0)=0,\ g^{(n)}(t)$$

संतत है,

$$\alpha_1=m+n-\alpha,\ s_1=m+n-s,$$

$$Re(\gamma)=0,\ Re(\alpha)>0,\ Re(s)>0,\ Re(\gamma_1)>0,$$

$$Re(\alpha_1)>0,\ Re(s_1)>0,$$

$$AB\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma_1)=1,$$

तथा D प्रदर्शित करता है u के प्रति अवकलन को।

(2.19) में

$$m_2=n_2=0,\ k_1=1,\ a_1=a,\ m_1=m,\ n_1-n,\ z_1=-z \text{ तथा } h_2=-1$$

रखें। माना $a_2\to 0$ तथा ([7], p. 18. (2.6.3)) का प्रयोग करते हुए नायर द्वारा स्थापित परिणाम (6, pp 272) प्राप्त करें।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय रीजनल इंजीनियरिंग कालेज कालीकट के प्रिंसिपल के आभारी हैं जिन्होंने आवश्यक सुविधाएँ प्रदान कीं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए॰, Tables of Integral Transforms, Part I. McGraw Hill Book Company, New York, 1954.

2. मैकलाचान, एन॰ ए॰, Laplace Transform and their applications to differential equations, Dover Publications, New York, 1042.

6. मुहम्मद, टी॰ ए॰, Special Functions and and its Applications, पी-एच॰ डी॰ थीसिस University of Calicut.

4. नायर, वी० सी०, Portugal Mathematica, vol. 30.

5. वही, Riv. Mat. Univ. Parma 1375), **4**(1) 9-15.

6. वही, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1975, **18**, 261-273.

7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The H-functions of one and two variables with applications, South Asian Publications, New Delhi, Madras, 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

उष्मा संचलन से सम्बद्ध आंशिक अवकल समीकरण का हल

एस॰ डी॰ बाजपेयी

गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय, इसा टाउन, बहरीन

[प्राप्त—फरवरी 24, 1992]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में हम उष्मा संचालन से सम्बद्ध एक आंशिक अवकल समीकरण को सूत्रबद्ध करेंगे ।

Abstract

Solution of a partial differential equation related to heat conduction. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, University of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain and Institute for basic Research, P. O. Box 1577, Palm Harbor, FL 34682-1577, U. S. A.

In this note, we formulate and solve a partial differential equation, which is related to heat conduction.

1. प्रस्तावना

इस टिप्पणी में हम निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण प्रस्तुत करते हैं

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left[\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+2u\right],\ (-\infty<x<\infty). \tag{1.1}$$

जिसके हलों से हर्माइट बहुपद प्राप्त होते हैं ।

(1.1) के हलों को सीमा-प्रतिबन्ध तुष्ट करना चाहिए—

$$\lim u(x)=0. \tag{1.2}$$

$$|x|\to\infty$$

समीकरण (1·1) सम्बद्ध है समीकरण [2, p. 148, (1)]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{U}{k}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\nu(\nu-\nu_0)}{k}-\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \tag{1.3}$$

से बशर्ते

$$U=2kx,\ \nu_0=0,\ \nu=-2k,\ (-\infty<x<\infty).$$

समीकरण (1·1) संप्रयुक्त विज्ञान की अन्य कतिपय समस्याओं से सम्बद्ध हो सकता है।

2. अवकल समीकरण का हल

हमें जो हल प्राप्त करना है वह है—

$$u(x,\ t)=\sum_{n-0}^{\infty} C_n\ e^{-2knt-x^2}\ H_n(x), \tag{2.1}$$

जहाँ $H_n(x)$ हर्माइट बहुपद हैं।

उपपत्ति

माना कि (1·1) के हल का स्वरूप है :

$$u(x,\ t)=y(x)\ e^{-2knt-x^2}. \tag{2.2}$$

(1·1) में (2·2) से $u(x,\ t)$ का प्रतिस्थापन करने पर निम्नलिखित अवकल समीकरण प्राप्त होता है :

$$y''-2xy'+2ny=0, \tag{2.3}$$

जो हर्माइट का अवकल समीकरण [1, p. 170, (5.16)] है जिसका हल $y=H_n'(x)$ है।

अतएव (1.1) के हल का स्वरूप होगा :

$$u(x,\ t)=e^{2knt-x^2}\ H_n(x). \tag{2.4}$$

अध्यारोपण के सिद्धान्त को व्यवहृत करने पर (1·1) का सामान्य हल (2·1) से प्राप्त किया जाता है।

(2.1) में $t=0$ रखने पर

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\ e^{-x^2}\ H_n(x). \tag{2.5}$$

(2.5) के दोनों पक्षों में $H_m(x)$ से गुणा करने तथा $-\infty$ से ∞ में x के प्रति समाकलित करने तथा हर्माइट बहुपदों के लाम्बिकता गुण [1, pp. 170-171, (5.17) and (5.22)], का प्रयोग करने पर

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, H_n(x)\, dx. \tag{2.6}$$

टिप्पणी : अगली सूचना में हम (2·1) की विशिष्ट दशाएँ फाक्स के H-फलन के पदों में प्रस्तुत करना चाहेंगे।[3]

H-फलन की महत्ता सम्प्रयुक्त गणित तथा भौतिक विज्ञान में है[4] अतः (2·1) के विशेष हल में ऐसी कुंजी का काम देगा जिससे माइजर के G-फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन, बेसेल, लीगेण्ड्र फलनों के अनेक हल प्राप्त किये जा सकेंगे।

निर्देश

1. ऐंड्रूस, एल० सी०, Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians. मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1985
2. कार्सला, एच० एस० तथा जेगर, जे० सी०, Conduction of Heat in solids : क्लैरेन्डन प्रेस आक्सफोर्ड 1986
3. फाक्स, सी० Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 395-429
4. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० The H-function with applications in statistics and other disciplines. विले ईस्टर्न लिमिटेड, नई दिल्ली 1978

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

फूरियर श्रेणी के परम समाकलनीय गुणांक पर एक प्रमेय

श्याम लाल तथा एस० वी० सिंह
गणित विभाग, केन्द्रीय विद्यालय II, मिलिटरी कैम्पस, गया (बिहार)

[प्राप्त—अक्टूबर 22, 1990)

सारांश

फूरियर श्रेणी के परम समाकलनीय गुणकों पर एक प्रमेय सिद्ध किया गया है।

Abstract

A theorem on absolute summability factors of a Fourier series. *By* Shyam Lal and V. S. Singh, Department of Mathematics, Kendriya Vidyalaya No. II, Military Campus, Gaya (Bihar).

A theorem on absolute summability factors of a Fourier series has been proved.

1. प्रस्तावना

माना कि अनुक्रम या श्रेणी परमत: (z, α, β) संकलनीयता $|z, \alpha, \beta|$ है यदि $\beta=0$, तो परम संकलनीयता (z, α, β) वैसी ही है जैसी परम संकलनीयता (c, α) तथा $\beta>0$, परम संकलनीयता (c, α) सूचक है परम संकलनीयता (z, α, β) का। अत: परम संकलनीयता (z, α, β) को सार्वीकृत परम हार्मोनिक चेजारो संकलनीयता माना जाता है।

2. परिभाषाएँ

माना α तथा β वास्तविक संख्याएँ हैं तथा

$$\left\{ A_n^{\alpha, \beta} \right\}$$

ऐसे अचरों का अनुक्रम है कि परिभाषा (2.1) निम्न श्रेणी द्वारा दी जाती है—

$$\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\left(\log\frac{a}{1-z}\right)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha,\,\beta}\ z^n$$

जो लघु z के लिए वैध है अर्थात् $<z<1$ तथा $\alpha>-1$ एवं $a\geqslant 2$ यह ज्ञातव्य है ([4] p 192) कि

$$A_n^{\alpha,\,\beta} \sim \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,(\log n)^{\beta} \text{ for } \alpha \neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

$$A_n^{\alpha,\,\beta} \sim (-1)^{\alpha-1}\,(|\alpha|-1)^{\beta}\,n^{\alpha}\,(\log n)^{\beta-1}$$

क्योंकि $\alpha=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$

माना कि ΣA_n आंशिक योगों के अनुक्रम $\{s_n\}$ के साथ अनन्त श्रेणी है। अनुक्रम-अनुक्रम परिवर्तन

$$\sigma_n^{\alpha,\,\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha\beta}} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1,\,\beta}\ s_v$$

कहलाता है $(z,\ \alpha,\ \beta)$ माध्य श्रेणी $\Sigma\ An$ का। यदि

$$\sigma_n^{\alpha,\,\beta} \to s$$

ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{s_n\}$ या श्रेणी $\Sigma A_n\ s$ तक संकलनीय $(z,\ \alpha,\ \beta)$ है,

यदि आगे भी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ \sigma_n^{\alpha,\,\beta} - \sigma_{n-1}^{\alpha,\,\beta}\ \right| < \infty$$

हम कह सकते हैं कि अनुक्रम $\{s_n\}$ या श्रेणी ΣA_n परमतः $(z,\ \alpha,\ \beta)$ संकलनीय या संकलनीय $|z,\ \alpha,\ \beta|$ है।

माना कि $f(t)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और लेबेस्क में $(-\pi,\ \pi)$ के बीच समाकलनीय है। हम यह मान सकते हैं कि बिन्दु $t=x$ पर $f(t)$ पर फूरियर श्रेणी है।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \tag{2.2}$$

संकेतन : हम निम्नलिखित संकेतनों का प्रयोग करेंगे :

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}$$

$$S_k^{1+\rho,\beta}(n,t)=\sum_{v=0}^{k} A_{n-v}^{\rho,\beta}\sin(v+1)t,\ 0\leqslant k\leqslant n$$

$$E^{1+\rho,\beta}(n,t)=\frac{1}{A_n^{1+\rho,\beta}}\sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\rho,\beta}\frac{\sin(v+1)t}{\{\log(v+2)\}\delta}$$

$$\Delta u_n=u_n=u_{n+1j}$$

किसी अनुक्रम $\{u_n\}$ के लिए

$$\tau=\left[\frac{2\pi}{t}\right]_j [x]$$

सूचक हैं सबसे बड़े पूर्णांक का जो x से बड़ा नहीं है।

प्रमेय A : रे[1] ने फूरियर श्रेणी से सम्वद्ध एवं श्रेणी की परम चेजारो संकलनीयता के लिए निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है :

यदि

$$\int_0^{\pi}\frac{|\phi(r)|}{t\{\log 2\pi/t\}^{\delta}},\ dt<\infty$$

तो

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{\{\log(n+1)\}^{\delta}} \tag{3.1}$$

संकलनीय $|c, 1+\rho|$ हैं $\rho>0$ तथा $\delta>0$ के लिए।

प्रमेय B : जेना तथा आबिद[5] ने सार्वीकृत परम चेजारो संकलनीयता के लिए निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

यदि

$$\int_0^{\pi}\frac{|\phi(t)|}{t\{\log(2\pi/t)\}^{\delta}}\ dt<\infty,$$

तो

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x)}{\{\log(n+1)\}^{\delta}} \tag{3.2}$$

समस्त वास्तविक β तथा $\rho, \delta>0$ के लिए संकलनीय $|z, 1+\rho, \beta|$ है।

मुख्य प्रमेय : हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

माना कि $\{p_n\}$ एक अनृण एकदिष्ट अवर्धमान अनुक्रम है वास्तविक अचरों का जिससे कि $P_n \to \infty$, ज्यों-ज्यों $n \to \infty$

जहाँ

$$P_n = \sum_{v=0}^{\infty} p_v. \tag{3.3}$$

यदि $\alpha(t)$ सूचित करे t फलन को तो $\alpha(t)$ तथा $t/\alpha(t)$ t के साथ एकदृष्ट रूप से वृद्धि करते हैं जहाँ

$$\log \tau = 0(\alpha(P\tau))\ t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi \tag{3.31}$$

तथा

$$\int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t\{\alpha(P\tau)\}^{\delta}} \cdot dt < \infty \tag{3.32}$$

तो

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{\{\log(n+1)\}^{\delta}}.$$

समस्त वास्तविक β तथा $\rho, \delta>0$ के लिए संकलनीय $|z, 1+\rho, \beta|$ है

4. प्रमेयिकाएँ :

प्रमेयिका[1] यदि $\tau_n^{\rho, \beta}$ द्वारा (z, ρ, β) सूचित हो जो अनुक्रम $\{n A_n\}$ का माध्य हो तो $|z, \rho, \beta|$ (4.1) के श्रेणी ΣA_n की संकलनीयता तुल्य है

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\tau_n^{\rho, \beta}\right|}{n} < \infty \tag{4.1}$$

प्रमेयिका[2]

$$\left|\frac{d}{dt}\ g_{(n,t)}^{1+\rho, \beta}\right| = \begin{cases} 0(n) & \text{समस्त} + \text{के लिये} \\ 0\left(\dfrac{\tau^{1+\rho}(\log \tau)^{\beta}}{n^{\rho}(\log n)^{\beta}}\right) & \end{cases} \tag{4.2}$$

$\pi \geqslant t \geqslant 1/n$ के लिए

प्रमेयिका[5]

$$\left|\frac{d}{dt}\ S_{k(n,t)}^{1+\rho}\right| = \begin{cases} 0(n^{\rho}(\log n)^{\beta} k^2)\ \forall t \\ 0(n^{\rho}(\log n)^{\beta} kt^{-1} \end{cases} \tag{4.1}$$

$\pi \geqslant t \geqslant 1/n$ के लिए

प्रमेयिका

$$\left|\frac{d}{dt} E_{(n,\, t)}^{1+\rho,\, \beta}\right| = \begin{cases} 0\left(\dfrac{n}{(\log n)^{\delta}}\right) \forall t \\ 0(t^{-1} \log n)^{-1-\delta} \end{cases}$$

$$0\left(\frac{\tau^{1+\rho} (\log \tau)^{\beta}}{n^{\rho} (\log n)^{\beta+\delta}}\right) \tag{4.4}$$

$\pi \geqslant t \geqslant 1/n$ के लिए

5. प्रमुख प्रमेय की उपपत्ति

माना कि

$$\tau_n^{1+\rho,\, \beta} = \frac{1}{A_n^{1+\rho,\, \beta}} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\rho,\, \beta} \frac{(v+1)\, A_{v+1}(x)}{\{\log (y+1)\}^{\delta}}$$

तो $\tau_n^{1+\rho,\, \beta}$ nवाँ सामान्य चेजारो माध्य है कोटि $1+\rho,\, \beta$ अनुक्रम

$$\left\{\frac{(v+1)\, A_{v+1}\, (x)}{\{\log (v+2)\}^{\delta}}\right\}$$

की कोटि $1+\rho,\, \beta$ का यह प्रदर्शित करना पर्याप्त है कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\tau_n^{1+\rho,\, \beta}}{n}\right| \tag{5.1}$$

चूंकि

$$A_{v+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t) \cos(v+1)\, t\, dt,$$

अब

$$\tau_n^{1+\rho,\, \beta} = \frac{1}{A_n^{1+\rho,\, \beta}} \sum_{v=0}^{n} A_n^{\rho,\, \beta} \frac{(v+1)}{\{\log (v+2)\}^{\delta}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)$$

$$\cos\, (v+1)\, t\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t) \left[\frac{d}{dt} \left\{\frac{1}{A_n^{1+\rho,\, \beta}} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\rho,\, \beta} \frac{\sin\, (v+1)t\, dt}{\{\log(v+2)\}^{\delta}}\right.\right.$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t) \left\{\frac{d}{dt} E_n^{1+\rho,\, \beta} (n,\, t)\right\} dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\tau_n^{1+\rho,\,\beta}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left\{\frac{d}{dt}\,E_n^{1+\rho,\,\beta}(n,t)\,dt\right\}\right|}{n}$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\phi(t|\,dt}{t\{\alpha(\rho\tau)\}^{\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{d}{dt}\,E_n^{1+\rho,\,\beta}(n,t)\right|}{n}$$

$$t(\alpha(\rho\tau))^{\delta}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\frac{d}{dt}\,E^{1+\rho,\,\beta}(n,t)\right|}{n} = \sum_{n=1}^{\tau}\left|\frac{d}{dt}E^{1+\rho,\,\beta}(n,t)\right| + \sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{\left|\frac{d}{dt}\,E^{1+\rho,\,\beta}(n,t)\right|}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\tau}\frac{\left[\frac{n}{(\log n)^{\delta}}\right]}{n} + \sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{n}\,[0(t^{-1}(\log n)^{-1-\delta}]$$

$$+0\left(\frac{\tau^{1+\rho}\,(\log\tau)^{\beta}}{n\rho\,(\log n)^{\beta+\delta}}\right)\Bigg]$$

अमेयिका (4.4) से

$$= \sum_{n=1}^{\tau} 0\left(\frac{1}{(\log n)^{\delta}}\right)+0\left(\frac{1}{t}\right)\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{1+\delta}}$$

$$+0[\tau^{1+\rho}(\log\tau)^{\beta}]\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}(\log n)^{\beta+\delta}}$$

$$=0[t^{-1}(\log\tau)^{-\delta}]$$

समस्त वास्तविक β के लिए

$$=0\left[\frac{1}{t(\log\tau)^{\delta}}\right].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\frac{d}{dt}\,E^{1+\rho}(n,t)\right|}{n} = 0\left[\frac{1}{t(\alpha(\rho_{\tau}))}\right] \qquad (5.2)$$

t में समान रूप से

$$0\leqslant t\leqslant\pi$$

(3.31) से

समीकरण (5.1) तथा (5.2) से हमें प्राप्त होता है कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \tau_n^{1+\rho,\, \beta} \right| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|\, dt}{t\{\alpha(\rho_\tau)\}^{\delta}}\ 0\left[\frac{1}{t(\log \tau)^{\delta}}\right] . (\log \tau)^{\delta}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|\, dt}{t\{\alpha(\rho_\tau)\}^{\delta}}\ 0(1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\tau_n^{1+\rho,\, \beta}}{n} \right| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|\, dt}{t\{\alpha(\rho_\tau)\}^{\delta}} . 0(1)$$

क्योंकि

$$\int_0^{\pi} \frac{|\phi(t)|\, dt}{t\{\alpha(\rho_\tau)\}^{\delta}} < \infty$$

टिप्पणी : दृष्टव्य है कि प्रमेय A (3.1) तथा प्रमेय B (3.2) हमारे प्रमेय की विशिष्ट दशाएँ हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाने के लिए लेखकगण प्रो० एल० एम० त्रिपाठी, गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय के आभारी हैं।

निर्देश

1. करमाटा, जे०, Mathematical (cluj), 1935, 104
2. लोटोंस्की, ए० वी०, Ivanov. Gos. Red. Inst. Uchem. *Zap*. 1963, 4, 61
3. ऐग्न्यू, आर० पी०, Michigan, Math. Journal, 195, 4, 105
4. वुकोविक, वी०, Math. Zeitchr, 1965, 89, 192
5. जेना, एस० सी० तथा मोहम्मद आबिद, Journal of Indian Maths. Soc. 1991, 56, 153

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 36, No. 1, 1993

सार्वीकृत H-फलन का उनके प्राचलों के परिप्रेक्ष्य में समाकलन

आर० के० सक्सेना तथा यशवन्त सिंह
गणित तथा सांख्यिकीय विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—मार्च 16, 1992]

सारांश

सक्सेना के I-फलन से सम्बद्ध चार समाकलों का मान एक प्राचल के प्रति समाकलन करते हुए निकाला गया है ।

Abstract

Integration of generalized H-function with respect to their parameters. *By* R. K. Saxena and Yashawnt Singh, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhpur (Raj).

Four integrals associated with *I*-function due to Saxena are evaluated, the integration is performed with respect to a parameter.

1. प्रस्तावना

सक्सेना के सार्वीकृत *H*-फलन[8] वाले चार समाकलों का मूल्यांकन एक प्राचल के प्रति समाकलन करते हुए किया गया है । प्राचलों के विशिष्टीकरण से ह्विटेकर फलन, सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन, बेसेल फलन तथा फाक्स का *H*-फलन[2] वाले समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं ।

2. समाकल

समाकल I

$$(2\pi t)^{-1} \int_L \frac{\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}\, e^{\pm i\pi x}$$

$$\cdot I^{m,n}_{p_i, q_i : r}\left[y \left| \begin{matrix}(1-a-x, h), \{(a_j, \alpha_j)_{1, n}\}, \{(a_{ji}, \alpha_{ji})_{n+1, p_i}\} \\ \{(b_j, \beta_j)_{1, m}\}, \{(b_{ji}, \beta_{ji})_{m+1, q_i}\}\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$= \frac{e^{\pm i\pi x}}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}\, I^{m+1, n+2}_{p_i+2, q_i-1 : r}\left[y\, e^{\pm i\pi h} \left| \begin{matrix}(1-a-b, h)\ (1-a-c, h), \\ (d-a-b-c, h)\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(a_j, \alpha_j)_{1, n}\}, \{(a_{ji}, \alpha_{ji})_{n+1, p_i}\} \\ \{(b_j, \beta_j)_{1, m}\}, \{(b_{ji}, \beta_{ji})_{m+1, q_i}\}\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते

$$Re\left[d-a-b--c-h\,\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right]>0, \text{ क्योंकि } j=1, \ldots, n.$$

सक्सेना[8] द्वारा प्रचारित I-फलन को निम्नवत् अंकित तथा परिभाषित किया जायेगा :

$$I(z)=I^{m, n}_{p_i, q_i : r}[z]$$

$$=I^{m, n}_{p_i, q_i : r}\left[z \left| \begin{matrix}\{(a_j, \alpha_j)_{1, n}\}, \{(a_{ji}, \alpha_{ji})_{n+1, p_i}\} \\ \{(b_j, \beta_j)_{1, m}\}, \{(b_{ji}, \beta_{ji})_{m+1, q_i}\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi w}\int_L \chi(s)\, z^s\, ds \tag{2.2}$$

जहाँ

$$w=\gamma-1,$$

$$\chi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\sum_{i=1}^{r}\left\{\prod_{j=m+1}^{q_2}\Gamma(1-b_{ji}+\beta_{ji}\, s)\prod_{j=n+1}^{p_i}\Gamma(a_{ji}-\alpha_{ji}\, s\right\}}$$

$$p_i(i=1, \ldots, r),\ q_i(i=1, \ldots, r),\ m,\ n$$

पूर्णांक हैं जिनसे

$$0 \leqslant n \leqslant p_i,\ 0 \leqslant m \leqslant q_i\ (i=1, \ldots, r,$$

तुष्टि होती है, r सान्त है,

$$\alpha_j,\ \beta_j,\ \beta_j,,\ \beta_{ji}$$

तथा

$$a_j,\ b_j,\ a_{ji},\ b_{ji}$$

ऐसी सम्मिश्र संख्यायें हैं जिससे कि

$$\alpha_j(b_h+\nu) \neq \beta_h(a_j-1-k) \text{ क्योंकि } \nu, \gamma=0, 1, 2, \ldots$$

जब $r=1$, तो सार्वीकृत H-फलन फाक्स के H-फलन में समानीत हो जाता है।

समाकल I की उपपत्ति : माना कि

$$I=(2\pi i)^{-1}\int_{z}\frac{\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}\,e^{\pm i\pi x}\,(2\pi i)^{-1}\int_{L}y^{s}\,\Gamma(a+x-hs)$$

$$\cdot\,\chi(s)\,ds\,dx$$

जहाँ $\chi(s)$ को (2.3) द्वारा दिया जाता है

$$=(2\pi i)^{-1}\int y^{s}\,\chi(s)\,ds\,(2\pi i)^{-1}\int_{L}\frac{\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)\,\Gamma(a-hs+x)}{\Gamma(d-x)}$$

$$.\,e^{\pm i\pi x}\,dx,$$

समाकलन का क्रम बदलने पर

$$=(2\pi i)\int_{L}\frac{y^{s}\chi(s)\,\Gamma(a-hs+b)\,\Gamma(a-hs+c)\,\Gamma(d-a-b-c+hs)}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}$$

$$.\,e^{\pm i\pi(a-hs)}\,ds$$

समाकल II

$$(2\pi i)^{-1}\int_{L}\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)\,e^{\pm i\pi x}$$

$$\cdot\,I^{m,\,n}_{p_i,\,q_i\,:\,r}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}\{(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n}\},\,\{(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i}\}\\ \{(b_j,\,\beta_j)_{1,\,m}\},\,\{(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\}\end{matrix}\right]dx$$

$$=e^{+i\pi a}\Gamma(a+b)\Gamma(b+a)\,I^{n;n+1}_{p^i+1,\,q^i+2:r}\left[\,q\,\middle|\,\begin{matrix}(1-d+a+b+c,\,h\\ \{(b_j,\,\beta_j)_1,\,m\}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n}\},\,\{(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i}\}\\ \{(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\},\,(1-d+b,\,h),\,(1-d+c,\,h\end{matrix}\right]\tag{2.4}$$

बशर्ते

$$Re(d-a-b-c+\min_{1\leqslant j\leqslant m}\left[\frac{b_j}{\beta_j}\right]\Big)>0$$

क्योंकि

$j=1,\,2,\,\ldots,\,m.$

समाकल III

$$(2\pi i)^{-1}\int_{L}\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,e^{\pm i\pi x}$$

$$.\,I^{m,\,n+1}_{p_i+1,\,q_i+1\,:\,r}\left[\,y\,\middle|\,\begin{matrix}(1-c+x,\,k)\,\{(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n}\},\,\{(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i}\}\\ \{(b_j,\,\beta_j)_{1,m}\},\,\{(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\}\},\,(1-d+x,\,h)\end{matrix}\right]dx$$

$$=e^{\pm i\pi a}\,\Gamma(a+b)\; I^{m,\,n+2}_{p_i+2,\,q_i+2\,:\,r}\left[\,y\,\middle|\,\begin{matrix}(1-a-c,\,k),\,(1-d+a+b+c,\,h-k)\\ \{(b_j,\,\beta_j)_{1,\,m}\},\,\{(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n}\}\,\{(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i}\}\\ (1-d+b,\,h),\,(1-d+c,\,h-k)\end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

बशर्ते

$$Re\left(d-a-b-c+(h-k)\min_{1\leqslant j\leqslant m}\left[\frac{b_j}{\beta_j}\right]\right)>0,$$

क्योंकि $j=1,\,\ldots,\,m$. यही नहीं $(h,\,k)<0$.

समाकल IV

$$(2\pi i)^{-1}\int_L \Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,e^{\pm i\pi x}$$

$$\cdot\, I^{m,\,n+1}_{p_i+1,\,q_i\,:\,r}\left[\,y\,\middle|\,\begin{matrix}(1-c+x,\,h),\,(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n},\\ (b_j,\,\beta_j))_{1,m},\,(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i},\,(d-x,\,k)\\ \ldots\end{matrix}\right]dx$$

$$=\Gamma(a+b)\,e^{\pm i\pi a}\; I^{m+1,\,n+1}_{p_i+3,\,q_i+1\,:\,r}\left[\,y\,\middle|\,\begin{matrix}(1-a-c,\,h)\\ (d-a-b-c,\,k+h)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,n}\},\,\{(a_{ji},\,\alpha_{ji})_{n+1,\,p_i}\}\,(d-b,\,k),\,(d-c,\,k+h)\\ \{(b_j,\,\beta_j)_{1,m}\},\,\{(b_{ji},\,\beta_{ji})_{m+1,\,q_i}\}\end{matrix}\right] \tag{2.6}$$

बशर्ते

$$Re\left[d-a-b-c-(k+h)\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right]>0,\,j=1,\,\ldots,\,n.$$

समाकल (2.1), (2.4), (2.5), एवं (2.5) इतने सामान्य हैं कि इनसे उपयोगी परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं। इनमें से कुछ का उल्लेख आगे किया जा रहा है।

3. विशिष्ट दशायें

यदि हम (2.1), (2.4), (2.5), (2.5), में $r=1$ रखें तो वे नायर तथा नम्बुद्रीपाद[6] द्वारा प्राप्त निम्नलिखित समाकल में समानीत हो जाते हैं—

$$(2\pi i)^{-1}\int_L \frac{\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}\,e^{+i\pi x}\,H^{m,\,n+1}_{p+1,\,q}\left[\,y\,\middle|\,\begin{matrix}(1-a-x,\,h),\,(a_j,\,\alpha_j)\\ (b_j,\,\beta_j)\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{e^{\pm\pi i a}}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(-c)}\;H^{m+1,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[\,y\,e^{\pm i\pi h}\,\right|$$

$$\left.\begin{matrix}(1-a-b,\ h),\ (1-a-c,\ h),\ (a_j,\ \alpha_j)\\ (d-a-b-c,\ h),\ (b_j,\ \beta_j)\end{matrix}\right] \qquad (3.1)$$

बशर्ते

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \sum_{i=u+1}^{p} (\alpha_i) + \sum_{j=1}^{m} (\beta_j) \sum_{m+1}^{q} (\beta_j) > 0$$

$$|\arg y| < \phi \frac{\pi}{2},\ Re[d-a-b-c-h\ (a_j-1)/\alpha_j] > 0,$$

क्योंकि

$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

$$(2\pi i)^{-1} \int_Z \Gamma(a+x)\ \Gamma(b+x)\ \Gamma(c-x)\ e_{+}^{i\pi x}$$

$$H_{p,\ q+1}^{m,\ n} \left[y \left| \begin{matrix}(a_j,\ \alpha_j)\\ (b_j,\ \beta_j),\ (1-d+x,\ h)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$= e^{\pm i\pi a}\ \Gamma(a+b)\ \Gamma(a+c)\ H_{p+1,\ q+1}^{m,\ n+1}$$

$$\left[y \left| \begin{matrix}(1-d+a+b+c,\ h),\ (a_j,\ \alpha_j)\\ (b_j,\ \beta_j),\ (1-d+b,\ h),\ (1+d+c,\ h)\end{matrix}\right.\right] \qquad (3.2)$$

बशर्ते

$$\phi > 0,\ |\arg y| < \phi \frac{\pi}{2}$$

तथा

$$Re\left[d-a-b-c+h\frac{b_j}{\beta_j}\right] > 0,$$

क्योंकि

$j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \Gamma(a+x)\ \Gamma(b-x)\ e^{\pm i\pi x}\ H_{p+1,\ q+1}^{m,\ n+1} \left[y \left| \begin{matrix}(1-c+x,\ k),\ (a_j,\ \alpha_j)\\ (b_j,\ \beta_j),\ (1-d+x,\ h)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$= e^{\pm i\pi a}\ \Gamma(a+b)\ H_{p+2,\ q+2}^{m,\ n+2} \left[y \left| \begin{matrix}(1-a-c,\ k),\ (1-d+a+b+c,\ h-k),\\ (b_j,\ \beta_j),\ (1-d+b,\ h),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j,\ \alpha_j)\\ (1-d+c,\ h-k)\end{matrix}\right] \qquad (3.3)$$

बशर्ते

$$\phi > 0,\ |\arg y| < \phi \frac{\pi}{2}$$

तथा

$$Re\left[d-a-b-c+(h-k)\frac{b_j}{\beta_j}\right] > 0,$$

क्योंकि

$$j=1, 2, \ldots, m.$$

यही नहीं

$$h>0,\ k>0.$$

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \Gamma(a+x)\ \Gamma(b-x) e^{\pm i\pi x}$$

$$H_{p+2,\ q}^{m,\ n+1}\left[\ y \left| \begin{matrix} (1-c+x,\ h),\ (a_j,\ \alpha_j),\ (d-x,\ k) \\ (b_j,\ \beta_j) \end{matrix} \right.\right] dx$$

$$=\Gamma(a+b)\ e^{\pm i\pi a}\ H_{p+3,\ q+1}^{m+1,\ n+1}\left[\ y \left| \begin{matrix} (1-a-c,\ h),\ (a_j,\ \alpha_j), \\ (d-a-b-c,\ (k+h), \end{matrix} \right.\right.$$

$$\left. \begin{matrix} (d-b,\ k),\ (d-c,\ k+h) \\ (b_j,\ \beta_j \end{matrix} \right] \tag{3.4}$$

बशर्ते

$$\phi>0,\ |\arg\ y|<\phi\ \frac{\pi}{2}$$

तथा

$$Re\left[d-a-b-c\ (k+h)\ \ \frac{a_j-1}{\alpha_j}\right]>0$$

क्योंकि

$$j=1, 2, \ldots, n.$$

समाकल (2.1) में

$$r=1,\ m=0,\ n=p_1=q_1=h=\alpha_1=\beta_1=1,$$

रखें a_1 के स्थान पर $2m-a+1$, b_1 के स्थान पर $k+m-a+\frac{1}{2}$ तथा y के स्थान पर $1/y$ रखें तथा गुप्ता और जैन [1, pd. 599-600, (4.5) एवं (4.8)] रखकर निम्नलिखित समाकल प्राप्त करें :

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \frac{\Gamma(b-x)\ \Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}\ e^{\pm i\pi x}\ y^{x/2}\ W_{k+1/2,\ m+1/2x}\ (y)\ dx$$

$$=\frac{y^{m+b+c-d+1/2}\ e^{+i\pi(b+c-d)+1/2}\ y}{\Gamma(d-b)\ \Gamma(d-c)}\ E\left[\begin{matrix} d-b,\ d-c,\ d-b-c-2m: \\ d-b-c-k-m\frac{1}{2};\ -\mathrm{y} \end{matrix}\right] \tag{3.5}$$

बशर्ते

$$Re(d-b-c-2m)>0$$

तथा E से मैकराबर्ट फलन- सूचित होता है ।

समाकल (2.4) में

$$r=1,\ m-1,\ n=p_1,\ \alpha_j=\beta_j=h=1$$

रखने तथा गुप्ता और [3, p. 600, (4.6)] का उपयोग करने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \frac{\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}\, e^{\pm i\pi x}$$

$$ {}_pF_{q+1}\left[\begin{matrix} a_1, a, \ldots, d_p; \\ d-x, b_1, b_2, \ldots, b_q; -y \end{matrix}\right] dx$$

$$= e^{\pm i\pi a}\, \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+c)\,\Gamma(d-a-b-c)}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}$$

$$ {}_{p+1}F_{q+2}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p, d-a-b-c; \\ b_1, b_2, \ldots, b_q, d-b, d-c; -y \end{matrix}\right] \tag{3.6}$$

बशर्ते

$$Re(d-a-b-c)>0.$$

अपरंच, $p=q=0$ रखने तथा y के स्थान पर y^2 रखने पर (2.6) से निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है जिसमें एक चर वाला बेसेल फलन निहित है।

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)\, e^{+i\pi x}\, y^x\, J_{d-x-1}(2y)\, dx$$

$$= y^{d-1}\, e^{+i\pi a}\, \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+c)\,\Gamma(d-a-b-c)}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}\, {}_1F_2\left[\begin{matrix} d-a-b-c; \\ d-b,\ d-c;\ -y^2 \end{matrix}\right] \tag{3.7}$$

बशर्ते

$$Re(d-a-b-c)>0.$$

समाकल (2.5) में

$$r=1,\ m=q_1=1,\ n=p_1=0,\ k=1,\ h=2,\ b_1=0,\ \beta_1=1$$

रखने पर तथा गामा फलन

$$\Gamma(2z)=\Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2})\,2^{2z-1}/\sqrt{\pi}$$

का द्विगुणन सूत्र प्रयुक्त करने पर निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है :

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \frac{\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)\,\Gamma(c-x)}{\Gamma(d-x)}$$

$$e^{\pm i\pi x}\, {}_1F_2[c-x;\ \tfrac{1}{2}(d-x),\ \tfrac{1}{2}(d-x+1);\ y]\, dx$$

$$= e^{\pm i\pi a}\, \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a=c)\,\Gamma(d-a-b-c)}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}$$

$$ {}_2F_3\left[\begin{matrix} a+x,\ d-a-b-c; \\ d-c,\ \tfrac{1}{2}(d-b),\ \tfrac{1}{2}(d-b+1);\ y \end{matrix}\right], \tag{3.8}$$

बशर्ते

$$Re(d-a-b-c)>0$$

समाकल (1.6) में

$$r=1,\ m=n=p_1=q_1=d=0.\ k=h=1$$

रखें तथा y के स्थान पर y^{-2} रखें तो दूसरा समाकल प्राप्त होता है जिसमें एक चर वाला बेसेल फलन निहित है :

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \Gamma(a+x)\, \Gamma(b-x)\, e^{+i\pi x}\, J_{c-1-2x}(2y)\, dx$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(2a+c)}\, e^{+i\pi a}\, y^{2a+c-1}\ {}_2F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}(a+b+c), \frac{1}{2}(a-b+c+1; \\ a-b+c, \frac{1}{2}(2a+c), \frac{1}{2}(2a+c+1); -y^2 \end{matrix}\right] \qquad (3.9)$$

$$n=c=0,\ k=h=a_j=\beta_j=1,\ m=q_1$$

रखने पर (2.6) एक समाकल में समानीत हो जाता है जिसको रगब ने [7 p. 98 Theorem] सिद्ध किया है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Aigher Transcendental function, McGraw-Hill, New York, भाग **1**, 1953.
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98,** 395-429.
3. गुप्ता, के० सी० तथा जैन- यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, **A36.** 594-669.
4. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with applications in Statistics and various other disciplines, John Wiley and Sous, New Delhi 1978.
5. वही, Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Pbysical Sciences, Lecture Notes Series No. 348, Springer-Verlage, Heidelberg 1973.
6. नायर, वी० सी० तथा नम्बुद्रिपाद, वी० एम०, Proc. Nat. Acad. Sci. Iudia, 1973, **43**(A).
7. रगब, एफ० एम०, Proc. Glasagow Math. Asso. 1957, **3,** 94-98.
8. सेक्सेना, वी० पी०, Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1982, **52,** 366-375.

समाकल (1.6) में

$$r=1,\ m=n=p_1=q_1=d=0.\ k=h=1$$

रखें तथा y के स्थान पर y^{-2} रखें तो दूसरा समाकल प्राप्त होता है जिसमें एक चर वाला बेसेल फलन निहित है :

$$(2\pi i)^{-1} \int_L \Gamma(a+x)\, \Gamma(b-x)\, e^{+i\pi x}\, J_{c-1-2x}\,(2y)\, dx$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(2a+c)}\, e^{+i\pi a}\, y^{2a+c-1}\ {}_2F_2 \left[\begin{matrix} \tfrac{1}{2}(a+b+c), \tfrac{1}{2}(a-b+c+1; \\ a-b+c, \tfrac{1}{2}(2a+c), \tfrac{1}{2}(2a+c+1); -y^2 \end{matrix} \right] \qquad (3.9)$$

$$n=c=0,\ k=h=\alpha_j=\beta_j=1,\ m=q_1$$

रखने पर (2.6) एक समाकल में समानीत हो जाता है जिसको रगब ने [7 p. 98 Theorem] सिद्ध किया है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Aigher Transcendental function, McGraw-Hill, New York, भाग **1,** 1953.
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98,** 395-429.
3. गुप्ता, के० सी० तथा जैन- यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, **A36.** 594-669.
4. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with applications in Statistics and various other disciplines, John Wiley and Sous, New Delhi 1978.
5. वही, Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Pbysical Sciences, Lecture Notes Series No. 348, Springer-Verlage, Heidelberg 1973.
6. नायर, वी० सी० तथा नम्बुद्रिपाद, बी० एम०, Proc. Nat. Acad. Sci. Iudia, 1973, **43(A).**
7. रगब, एफ० एम०, Proc. Glasagow Math. Asso. 1957, **3,** 94-98.
8. सेक्सेना, वी० पी०, Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1982, **52,** 366-375.

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

जैकोबी तथा सार्वीकृत राइस के बहुपद के लिए जनक सम्बन्ध

कु० अनामिका श्रीवास्तव
शासकीय मार्तण्ड माध्यमिक स्कूल, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 30, 1991]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन सम्बन्धी कतिपय जनक फलनों की स्थापना की गई है।

Abstract

Generating relation for Jacobi and generalised Rice's polynomial. *By* Miss Anamika Shrivastava, Government Martand H. S. School, Rewa (M. P.).

In this paper we establish a few generating relations involving hypogeometric function of two variables. Some specilizations, relevant to the present discussion, are also discussed.

1. यदि हम संकेतन

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \ldots\ldots (a+n-1);\ (a)_0 = 1,$$

का उपयोग करें जिसमें a काल्पनिक है तथा n धन पूर्णांक है तो दो चरों वाले सार्वीकृत हार्न फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है—

$$H_{:}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_m (\gamma)_n x^m y^n)}{(\delta)_m m! n!}, \tag{1.1}$$

$$|x| < 1.$$

$$H_8(\alpha, \beta, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{2m-n} (\beta)_{n-m} x^m y^n}{m!\, n!}, \tag{1.2}$$

$$|x| < 1/4.$$

$$H_{10}(\alpha, \delta, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n} x^m y^n}{(\delta)_m m!\, n!}, \tag{1.3}$$

$$|x| < 1/4.$$

$$G_1(\alpha, \beta, \beta', x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{n-m} (\beta')_{m-n} x^m y^n}{m!\, n!}, \tag{1.4}$$

$$|x| < r,\ |y| < s,\ r+s=1.$$

$$G_2(\alpha, \alpha', \beta, \beta', x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_{n-m} (\beta')_{m-n} x^m y^n}{m!\, n!}, \tag{1.5}$$

$$|x| < 1,\ |y| < 1.$$

प्रस्तुत शोधकार्य में हमें निम्नलिखित परिणामों की भी आवश्यकता पड़ेगी :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, 1+\alpha+\beta+n; 1+\alpha; \frac{1-x}{2}\right), \tag{1.6}$$

$$Re(\alpha) > -1,\ Re(\beta) > -1;$$

$$H_n^{(\alpha, \beta)}(\xi, p; v) = \frac{(1+\alpha)_n}{ni} {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi; \\ 1+\alpha, p \end{matrix}\ v\right] \tag{1.7}$$

$$(\alpha)_m = \frac{(-1)^m}{(1-\alpha)_m} \tag{1.8}$$

तथा

$$(n-p)! = \frac{(-1)^p\, n!}{(-n)_p}. \tag{1.9}$$

2. हम निम्नलिखित जनक सम्वन्धों को यहाँ स्थापित करेंगे—

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p\, y^p}{(\beta)_p\, p!} H_2(\gamma, \delta, 1-\gamma, \eta, x, y)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\delta)_m\, x^m}{(1-\delta-m)_n} H_n^{(-\delta-m,\ \delta-n-\eta}\ (\beta-\alpha, \beta, -y/x), \tag{2.1}$$

$$|x| < 1.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p\, x^p}{(\beta_p)\, p!} H_8\left(\gamma,\ 1-\gamma,\ \frac{2}{x(z-1)},\ x \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta)_m} \left(\frac{(1-z)}{2x} \right)^m P_n^{(-\beta,\ -n-\alpha)} (z), \tag{2.2}$$

$$\left| \frac{2}{x(z-1)} \right| < \tfrac{1}{4}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(y)^p}{(\alpha)_p\, p!}\ H_{10}\, (\beta,\ \gamma,\ x,\ y)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(y)^m}{(1-\beta)_n\, (\gamma)_m}\ H_n^{(-\beta,\ -\gamma-m-n+\beta)}\ (\alpha-\beta+n,\ \alpha,\ y/x), \tag{2.3}$$

$$|x| < 1/4.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_p\, z^p}{p!}\ G_1(\alpha.\ \delta,\ \lambda+p,\ x,\ x/2)$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(1-\lambda)_n} \left(\frac{x}{1-z} \right)^m P_n^{(-\lambda,\ \delta+\lambda-1-n)}\ (z), \tag{2.4}$$

$$|x| < r,\ \left| \frac{x}{2} \right| < s,\ x + \frac{x}{2} = 1.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_p\, z^p}{p!} G_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda+p,\ x,\ 4\ xy)$$

$$=(1-z)^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(1-\lambda)_n} \left(\frac{x}{1-3} \right)^n H_n^{(-\lambda,\ \beta+\lambda-n-1)}$$

$$(\gamma,\ 1-\alpha-n,\ 4y(3-1)), \tag{2.5}$$

$$|x| < 1,\ |4\ xy| < 1.$$

(2.1) की उपपत्ति :

माना कि

$$\phi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p\, p!} y^p\ H_2(\gamma,\ \delta,\ 1-\gamma,\ \eta,\ x,\ y).$$

H_2 को श्रेणी रूप में व्यक्त करने पर

$$\phi=\sum_{p=0}^{n}\frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p\,p!}y^p\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{m-n}\,(\delta)_m\,(1-\gamma)_n}{(\eta)_m\,m!\,n!}x^m\,y^n.$$

आन्तरिक संकलन का क्रम उलटकर निम्नलिखित परिणाम का उपयोग करें

$$(\alpha)_m\,(\alpha+m)_{-n}=(\alpha)_{m-n}$$

$$\phi=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_p\,(\gamma)_{m-p}\,(\delta)_m\,(1-\gamma)_{n-p}}{(\beta)_p\,(\eta)_m\,m!\,(n-p)!\,p!}x^m\,y^n.$$

निम्नलिखित परिणाम को प्रयुक्त करें

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ \alpha;\\ \beta;\end{matrix}\ 1\right]=\frac{(\beta-\alpha)_n}{(\beta)_n}$$

$$\phi=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\delta)_m\,(1-\eta-m)_n\,(-m)_n\,(\beta-\alpha)_n\,(-x)^{m-n}}{(1-\delta-m)_n\,(\eta)_m\,(\beta)_n\,m!\,n!}y^n$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\delta)_m\,(-x)^m}{(\eta)_m\,m!}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-m,\ 1-\eta-m,\ \beta-\alpha;\\ 1-\delta-m,\quad \beta;\end{matrix}\ -y/x\right],$$

जो (1.7) के परिप्रेक्ष्य में (2.1) प्रदान करेगा। समान प्रकार से अग्रसर होने तथा (1.6) एवं (1.7) का उपयोग करने पर हमें (2.2) तथा (2.3) प्राप्त होते हैं। (2.4) को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित पर विचार करें—

$$\Delta=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_p\,z^p}{p!}G_1\,(\alpha,\ \delta,\ \lambda+p,\ x,\ x/2)$$

G_1 को श्रेणी रूप में व्यक्त करने पर

$$\Delta=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_p\,z^p}{p!}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\,(\delta)_{n-m}\,(\lambda+p)_{m-n}\,x^m\,(x/2)^n}{m!\,n!}.$$

निम्नलिखित परिणाम का उपयोग करने पर

$$(\lambda)_p\,(\lambda+p)_{m-n}=(\lambda)_{p+m-n}=(\lambda)_{m-n}\,(\lambda+m-n)_p$$

$$\Delta=(1-z)^{-\lambda}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\,(\lambda)_{m-n}\,(\delta)_{n-m}}{m!\,n!}\left(\frac{x}{1-z}\right)^{m+n}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n,$$

आन्तरिक संकलन का क्रम उलटने तथा (1.8) एवं (1.9) का उपयोग करने पर

$$\Delta=(1-z)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(\alpha)_n(\lambda)_{m-n}(\delta)_{n-m}}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{x}{1-z}\right)^n\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-m}$$

$$=(1-z)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\left(\frac{x}{1-z}\right)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, & \delta; \\ & 1-\lambda;\end{matrix}\ \frac{1-z}{2}\right].$$

जो (1.6) के परिप्रेक्ष्य में (2.4) प्रदान करता है। यदि हम (1.7) का उपयोग करें और (2.4) की ही तरह अग्रसर हों तो हमें (2.5) प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(2.1) में $\eta=\delta$ तथा

$$y=\frac{2x}{1-y}$$

के लिए हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{2x}{1-y}\right)^m {}_2F_1\left[\begin{matrix}-m, & \beta-\alpha; \\ & 1+(\beta-1);\end{matrix}\ \frac{1-y}{2}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta-1)_m}\,x^m\,P_n^{(\beta-1,\,-n-\alpha)}\left(\frac{1}{y}\right). \tag{3.1}$$

x/y का x/δ द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (2.4) में $\delta\to\infty$ रखने पर

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_p\,z^p}{p!}\,H_8\,(\alpha,\,\lambda+p,\,x,\,x/2)$$

$$=(1-z)^{-\lambda}\,H_8\left(\alpha,\,\lambda,\,x,\,\frac{x}{2(1-z)}\right). \tag{3.2}$$

जहाँ H_8 को (2.1) में दिया गया है। (2.5) में y को y/γ में बदल कर तथा $\gamma\to\infty$, रखने पर

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_p\,z^p}{p!}\,G_1(\alpha,\,\beta,\,\lambda+p;\,x,\,4xy)$$

$$=(1-z)^{-\lambda}\,G_1\left(\lambda,\,\beta,\,\lambda,\,x,\,\frac{4xy}{1-z}\right). \tag{3.1}$$

पुनः (3·3) में y को y/β में बदलकर तथा $\beta \to \infty$ रखने पर

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_p z^p}{p!} H_8(\alpha, \lambda+p, x, 4xy)$$

$$=(1-z)^{-\lambda} H_8\left(\alpha, \lambda, x, \frac{4xy}{1-z}\right). \tag{3.4}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहायता के लिए लेखक गणित के प्रोफेसर डा० बी० एम० एल० श्रीवास्तव का आभारी है।

निर्देश

1. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, Macmillan and Co. New York, 1960
2. खडेकर, पी० आर०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1964, **34A**, 151-662
3. श्रीवास्तव, बी० एम०, पी-एच० डी० थीसिस, ए० एस० यूनिवर्सिटी रीवाँ, 1975
4. खान, आई० ए०, Proc. Amer. Maths. Soc. 1972, **32**, I, 179-189
5. श्रीवास्तव, एस० एम०, Annales polonici mathematics, 1972, **17**, 73-83

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 2, 1993

वाहित मल जल-अवमल के प्रयोग द्वारा मृदा में भारी धातुओं की कुल अभिवृद्धि

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 21, 1992]

सारांश

घरेलू वाहित मल जल-अवमल की विभिन्न मात्राओं का प्रयोग मृदा में भारी धातुओं (Cd, Cr Pb तथा Zn) की प्रत्याशित अभिवृद्धि तथा मेंथी द्वारा इन धातुओं का उद्ग्रहण ज्ञात करने के लिए किया गया। वाहित मल-जल की मात्रा 20 ली०/सिंचाई/मी०^2 की दर से प्रयोग की गयी। अवमल की मात्रा क्रमशः 0, 10, 20 तथा 30 टन/हे० की दर से प्रयोग की गयी। प्रयोगोपरान्त यह पाया गया कि मृदा में भारी धातुओं (Cd, Cr, Pb तथा Zn) की अभिवृद्धि तथा मेंथी द्वारा इन धातुओं के उद्ग्रहण में वृद्धि अवमल की बढ़ती मात्रा के प्रयोग से सम्बद्ध है।

Abstract

Total addition of heavy metals in soil through sewage sludge. *By* S. G. Misra and Dinesh mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad.

Different doses of domestic sewage-sludge were used in order to find out the .otal addition of heavy metals (Cd, Cr, Pb and Zn) in soil and their uptake by fenugreek. Sewage water was used @ 20 litres/irrigation/m^2 and total number of irrigations was 10. Four different doses of sludge viz. 0, 10, 20 and 30 tons/ha were used. A significant increase was observed in the total addition of heavy metats (Cd, Cr, Pb and Zn) in soil with respect to increasing doses of sludge. A similar pattern was also found in the case of uptake of heavy metals by fenugreek.

विश्लेषणों द्वारा अब यह ज्ञात हो चुका है कि वाहित मल-जल तथा अवमल में नाइट्रोजन तथा फास्फोरस के अतिरिक्त कुछ भारी धातुयें भी पायी जाती हैं जो मिट्टी में एकत्रित होने पर मृदा के

धात्विक प्रदूषण का कारण बनती हैं। साथ ही, पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहीत किये जाने से उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालती हैं[1]। यदि वाहित मल जल को अनियन्त्रित (अनुपचारित) ढंग से प्रयोग किया जाय तो इसमें सामान्य रूप से पायी जाने वाली भारी धातुयें—यथा Cd, Cu, Mo, Ni, Zn इत्यादि गम्भीर समस्या उत्पन्न कर सकती है[2]। भारी धातुयें पौधे द्वारा अवशोषित होकर उनकी उपापचयी क्रियाओं को प्रभावित कर सकती हैं, पौधे की कोशिकाओं में एकत्र होकर के खाद्य शृंखला में प्रवेश कर सकती हैं तथा मनुष्यों और पशुओं में विभिन्न रोगों का कारण बन सकती हैं। हर्म्स तथा ब्रूमर[3] के अनुसार 4-8 पी-एच० मान वाली मृदाओं में कार्बनिक पदार्थों के द्वारा भारी धातुओं की उपलब्धता बढ़ती है परन्तु जब कार्बनिक पदार्थ की अधिक मात्रा का प्रयोग किया जाता है तो इनकी उपलब्धता घटती है। पौधों द्वारा कैडमियम (Cd) का उद्ग्रहण मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ की प्रतिशत मात्रा से प्रभावित होता है क्योंकि मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ की मात्रा अधिक होने पर कैडमियम (Cd) मृदा कणों द्वारा अधिशोषित कर लिया जाता है।[4, 5, 6]

वाहित मल जल-अवमल की विभिन्न मात्राओं के प्रयोग के फलस्वरूप मिट्टी में भारी धातुओं—यथा Cd, Cr, Pb तथा Zn के संचय तथा मेंथी की फसल द्वारा इनके उद्ग्रहण का पता लगाने के उद्देश्य से प्रस्तुत अध्ययन की रूपरेखा बनायी गयी।

प्रयोगात्मक

1×1 मी०² के 48 प्लाटों में यादृच्छिक विधि द्वारा अवमल की चार मात्रायें (0, 10, 20 तथा 30 टन/है०) डाली गयीं और उनमें मेंथी उगायी गयी। सिंचाई वाहित मल जल से की गयी। कुल 10 सिंचाइयाँ की गयीं। प्रत्येक में प्रति प्लाट 20 ली० वाहित मल जल डाला गया।

प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त वाहित मल जल तथा अवमल शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रक्षेत्र के सामने से बह रहे नाले से एकत्र कर प्रयोग किया गया। इसमें प्रायः घरेलू वाहित मल जल ही बहता है। वाहित मल जल को बिना किसी उपचार के ही प्रयोग किया गया। अवमल को सुखाकर, पीसकर तथा छानकर प्रयोग किया गया। इसका विश्लेषण कार्बन तथा कुल भारी धातुओं के लिए किया गया जो इस प्रकार है—

कार्बनिक पदार्थ 2.62%, कैडमियम 22 ppm, क्रोमियम 15 ppm,
लेड 36 ppm, जिंक 196 ppm, आयरन 318 ppm,
मैंगनीज 216 ppm

वाहित मल जल में कुल भारी धातुओं की मात्रा निम्नवत् थी—

कैडमियम 0.28 ppm, क्रोमियम 0.53 ppm, लेड 3.52 ppm,
जिंक 8.32 ppm, आयरन 10.37 ppm, मैंगनीज 12.12 ppm

अवमल की चार भिन्न-भिन्न मात्राओं के प्रयोग से मिट्टी में भारी धातुओं—यथा Cd, Cr, Pb तथा Zn के संचय तथा मेंथी द्वारा इनके उद्ग्रहण से सम्बन्धित परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं। भारी धातुओं की मात्रा अम्ल-निष्कर्ष बनाकर एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा ज्ञात की गयी।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि उन प्लाटों में भी जिनमें अवमल का प्रयोग नहीं किया गया है, भारी धातुओं का संचय हुआ है यद्यपि यह संचय अवमल डाले हुए प्लाटों की तुलना में कम है। चूँकि वाहित मल जल में भी भारी धातुओं की कुछ न कुछ मात्रा विद्यमान है अतः बिना अवमल प्रयोग के मिट्टी में भारी धातुओं की उपस्थिति देखी गयी हैं। जैसे-जैसे अवमल की मात्रा बढ़ती जाती हैं, वैसे-वैसे मिट्टी में भारी धातुओं का संचय अधिक होने लगता है। संचित हुई भारी धातुओं की मात्रा में निम्न क्रम पाया गया—

$$Zn > Pb > Cr > Cd$$

सारणी 1

वाहित मल जल-अवमल के प्रयोग द्वारा मृदा में भारी धातुओं की कुल अभिवृद्धि तथा मेंथी द्वारा उद्ग्रहण

	मिट्टी में कुल धातु		मिट्टी में उपलब्ध धातु		मेंथी की फसल द्वारा उद्ग्रहण		मेंथी की फसल द्वारा निष्कासन
धातु	मिग्रा०/मी०^2	किग्रा०/हे०	मिग्रा०/मी०^2	किग्रा०हे०	मिग्रा०/मी०^2	किग्रा०/हे०	(% में)
(क)							
अवमल = 0, वाहित मल जल = 20 ली०/सिंचाई/मी०^2, कुल सिंचाई = 10							
कैडमियम (Cd)	560	5.60	234	2.34	0.3	0.003	0.12
क्रोमियम (Cr)	2016	20.16	60	0.60	0.8	0.008	1.3
लेड (Pb)	1880	18.80	72	0.72	0.1	0.008	1.1
जिंक (Zn)	23600	236.00	216	9.16	0.8	0.001	0.08

(ख)

अवमल = 10 टन/हे०, वाहित मल जल = 20 ली०/सिंचाई/मी०^2, कुल सिंचाई = 10

कैडमियम (Cd)	582	5.82	202	2.02	0.5	0.005	8.24
क्रोमियम (Cr)	2030	20.30	60	0.60	1.38	0.013	2.3
लेड (Pb)	1910	19.10	73	0.70	1.38	0.012	1.9
जिंक (Zn)	23780	237.80	920	9.20	1.78	0.0J7	0.19

(ग)

अवमल = 20 टन/हे०, वाहित मल जल = 20 ली०/सिंचाई/मी०^2, कुल सिंचाई = 10

कैडमियम (Cd)	604	6.04	202	2.02	0.5	0.005	0.24
क्रोमियम (Cr)	2044	20.44	90	0,90	1.12	0.012	1.2
लेड (Pb)	1940	19.40	68	0.68	1.00	0.010	1.4
जिंक (Zn)	23960	239.60	1112	11.12	1.80	0.180	0.16

(घ)

अवमल = 30 टन/हे०, वाहित मल जल = 20 ली०/सिंचाई/मी०^2, कुल सिंचाई = 10

कैडमियम (Cd)	626	6.26	202	0.02	0.3	0.003	0.14
क्रोमियम (Cr)	2058	20.56	30	0.30	1.92	0.019	6.4
लेड (Pb)	1970	19.70	68	0.68	1.83	0.018	2.69
जिंक (Zn)	14140	2S.140	900	9.00	3.12	0.031	0.34

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 36, No. 1, 1993

एक सार्वीकृत बहुपद सेट $\{M_n(x, y)\}$ के हाइपरज्यामितीय निरूपण

रामजी सिंह

पी० जी० गणित विभाग, महराज कालेज, आरा (बिहार)

[प्राप्त—मार्च 1, 1990]

सारांश

माइजर के G-फलन की सहायता से सार्वीकृत बहुपद सेट को जनक सम्बन्ध द्वारा परिभाषित किया गया है।

Abstract

Hypergeometric representations of a generalized polynomial set $\{M_n(x, y)\}$. *By* Ramji Singh, P. G. Department of Mathematics, Maharaja College, Arrah (Bihar).

In the recent paper polynomials $\{M_n(x, y)\}_0^\infty$ have been defined in (2.1) with the help of G-function[3]. Some useful hypergeometric components of superior orders have been obtained. These hypergeometric components yield as many as forty orthogonal and non-orthogonal polynomials some of which have been mentioned.

1. **परिभाषा** : हम सार्वीकृत बहुपद सेट $\{M_n(x, y)\}$ को जनक सम्बन्ध द्वारा परिभाषित करते हैं जिसमें माइजर का G-फलन निम्नवत् रहता है[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n\,;\,(1-v_{li});\,1-(a_{pi})}^{(a_i;\, b_i;\, c_i;\, d_i;\, m_i;\, n_i)} (x, y)\, t^n$$

$$= L(T)^{-d_3}\, G^{n_1,\, m_1;\, (n_2+1,\, m_2);\, (n_3+1,\, m_3}_{l_1,\, p_1;\, (l_2,\, p_2+1);\, (l_3,\, p_3+1)} \left[\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-v_{li}) \\ 0,\ (1-a_{pi}) \end{matrix} \right] \quad (i=1, 2, 3), \tag{1.1}$$

जहाँ (1) (m_i, n_i, l_i, p_i) ऐसे पूर्णांक हैं कि $(0 \leqslant m_i \leqslant l_i)$; $(0 \leqslant n_i \leqslant p_i)$

(2) $A_1 = 1 + 2n_2 + 2m_2 + 2n_1 + 2m_1 - p_2 - l_2 - p_1 - l_1 > 0.$

(3) $A_2 = 1 + 2n_3 + 2m_3 + 2n_1 + 2m_1 - p_3 - l_3 - p_1 - l_1 > 0.$

(4) $\arg X < \frac{1}{2}\pi A_1$, $\arg Y < \frac{1}{2}\pi A_2$.

प्रमेय

जनक फलन (1.1) से मिलता है

$$M^{(a_i;\, b_i;\, c_i;\, d_i;\, m_i;\, n_i)}_{n;\, (1-v_{l_1});\, (1-\alpha_{pi})}(x, y) = M_n(x, y)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/c_2]} \sum_{s=0}^{[n/c_1]} \frac{p^*_{e*}\,[(vl_1)]_{n*}\,[(vl_2)]_{n*-s}\,[(vl_3)]_s\,(-a_3)^{(n*-s)}\,(-b_3)^s\,(c_3)^k}{s!\,k!\,p^*_{(e*-k)}\,[(\alpha_{p1})]_{n*}\,[(\alpha_{p2})]_{n*-s}\,[(\alpha_{p3})]_s\,(n^*-s)!} \times$$

$$x^{a_1 s + a_2 k}\, y^{b_1(n*-s)+b_2 k}, \tag{1.2}$$

उपपत्ति : (1.1) के दक्षिण पक्ष को I से अंकित करने पर

$$I = L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{(m_i)} \Gamma_j(v^{(i)}) \prod\limits_{j=1}^{(n_i)} \Gamma(1-\alpha_j{}^i)\,(-a_3 y^{b_1})^n\,(-b_3 x^{a_1})^s\, t^{n+c_1 s}}{\prod\limits_{(j=m_i+1)}^{(l_i)} \Gamma(1-v_j{}^{(i)}) \prod\limits_{j=(n_i+1)}^{(p_i)} \Gamma(\alpha_j{}^{(i)})\, u!\, s!\, (1-T)^g} \times$$

$$= L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{(m_i)} \Gamma(v_j{}^{(i)}) \prod\limits_{j=1}^{(n_i)} \Gamma(1-\alpha_j{}^{(i)})\, -a_3\, y^{b_1})^n\, (-b_3\, x^{a_1})^s\, t^{n*c_1 s}}{\prod\limits_{j=(m_i+1)}^{(l_i)} \Gamma(1-v_j{}^{(i)}) \prod\limits_{j=(n_i+1)}^{(p_i)} \Gamma(\alpha_j{}^{(i)}\, s!\, n!} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k (g)_k\, t^{c_2 k}}{k!}$$

$$= L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{(m_i)} \Gamma(v_j{}^{(i)}) \prod\limits_{j=1}^{(n_i)} \Gamma(1-\alpha_j{}^{(i)})\, (-a_3\, y^{b_1})^n\, (-b_3\, x^{a_1})^s}{\prod\limits_{j=(m_i+1)}^{(l_i)} \Gamma(1-v_j{}^{(i)}) \prod\limits_{j=(n_i+1)}^{(p_i)} \Gamma(\alpha_j{}^{(i)})} \times$$

$$(T)^k\, (g)_k\, t^{n+c_1 s+c_2 k} \quad (i=1, 2, 3).$$

मेंथी द्वारा इन भारी धातुओं के उद्ग्रहण में भी अवमल की बढ़ती मात्रा के साथ वृद्धि देखी गयी जो स्वाभाविक ही है। मेंथी द्वारा इन भारी धातुओं में से Cr, Pb तथा Zn का निष्कासन (removal) अवमल की मात्रा में वृद्धि होने के साथ अधिक हुआ है किन्तु कैडमियम (Cd) के निष्कासन में अवमल की बढ़ती मात्रा के साथ कोई वृद्धि नहीं देखी गयी। ऐसा प्रतीत होता है कि अवमल में कैडमियम अधिक उपलब्ध नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय केन्द्रीय अन्तरस्थलीय प्रग्रहण मत्स्य अनुसंधान संस्थान, बैरकपुर (पश्चिमी बंगाल) के निदेशक डा० ए० जी० झिंगरन तथा वरिष्ठ वैज्ञानिक डा० एच० सी० जोशी के प्रति अपना आभार प्रदर्शित करते हैं जिनकी सहायता से मिट्टी तथा पौधों के नमूनों में भारी धातुओं के विश्लेषण में प्रयुक्त एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सुविधा प्राप्त हो सकी।

निर्देश

1. मिश्रा, एस० जी० तथा दिनेश मणि, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1991, 1-2, 83-90
2. कौंसिल ऑन एग्रीकल्चरल साइंस एण्ड टेक्नोलॉजी Application of Sewage sludge to Cropland : Appraisal of Potential hazards of the heavy metals to plants and animals. Office of water Programmes, EPA-44019-76-013, V. S. Environmental Protection Agency, Washington, D. C. 1970
3. हर्म्स, यू० तथा ब्रूमर, जी०, Influence of different types of Natural Organic Matter on the solubility of heavy metals in soils. In Proceeding "Environe Effect of Org. and inorg contaminants in Sewage-sludge", held on May 25-26, 1982 at Stevenage.
4. जॉन, एम० के०, Uptake of soil applied Cadmium and its distribution in radish. J. Plant Sci. 1972, **52**, 715-719
5. हगिरी, एफ०, Plant uptake of Cadmium as insluenced by CEC, Organic matter, Zinc and soil temperature : J. Environ. Qual. 1974, 3, 180-183
6. मेकलीन, ए० जे०, Cadmium in different plant species and its availability in soils as influenced by organic matter and additions of Lime, P, Cd, and Zn con. J. Soil Sci. 1976, **56**, 129-138.

प्रमेयिका [2, p. 57] के उपयोग से

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/c_2]}\sum_{s=0}^{[n/c_1]}\frac{(P)^*_{e*}\,[(v_{l1})]_{n*}\,[(v_{l2})]_{n*-s}\,[(v_{l3})]_s}{[(a_{p1})]_{n*}\,[(a_{p2})]_{n*-s}\,[(a_{p3})]_s\,s!\,k!}\times$$

$$\frac{(-a_3)^{n*-s}\,(-b_3)^s\,(c_3)^k\,x^{a_1s+a_2k}\,y^{b_1(n*-s)+b_2k}\,t^n}{(P^*)_{e*-k}\,(n^*-s)!}$$

मिलता है जिसकी तुलना (1.1) के वामपक्ष से करने पर (1.2) की प्राप्ति होगी।

प्रमेय 2

अभिव्यंजक $(P^*)\,e^*$ से निम्नलिखित के लिए आठ उच्च कोटि के हाइपरज्यामितीय घटक प्राप्त होते हैं

(1) $d_1\,c_1=1$, (2) $d_1\,c_2>1$, (3) $d_1\,c_2<0$ (4) $d_1\,c_2=0$

(5) $d_1\,c_1=d_2$ (6) $d_1\,c_1>d_2$, (7) $d_1\,c_1<0$ (8) $d_1\,c_1=0$.

उपपत्ति 1: दशा $d_1\,c_2=1$ रखने तथा थोड़ा साधारणीकरण करने पर

$$M_n(x,y)=L_1\sum_{k=0}^{[n/c_2]}\frac{(-1)^k\,(1-\beta)_k\,\phi_k\,\eta^k}{k!\,\psi_h}\sum_{s=0}^{[n/c_1]}\frac{w_s\,z^s}{s!}$$

$$=L_1\sum_{s=0}^{[n/c_1]}\frac{w_s\,z^s}{s!}\,P^{**}\,Fc_2\,L^*\left[\begin{matrix}\phi;\,(1-\beta)\\ \psi;\,-\eta\end{matrix}\right] \tag{1.3}$$

इसी तरह की विधि से अन्य दशाओं के लिए हाइपरज्यामितीय फलन मिलेंगे।

दशा 2 : $d_1\,c_2>1$, के लिए

$$M_n(x,y)=L_1\sum_{s=0}^{[n/c_1]}\frac{w_s\,z^s}{s!}\,F\left[\begin{matrix}\phi,\,\triangle(d_1\,c_2;\,1-\beta);\\ \psi,\,\triangle((d_1\,c_2-1);\,1-\beta);\end{matrix}\;\frac{n(d_1\,c_2)^{d_1c_2}}{(d_1c_2-1)^{d_2c_1-1}}\right]. \tag{1.4}$$

दशा 3 : $d_1\,c_2<0$ के लिए, माना $d_1\,c_2=-\lambda$ तो

$$M_n(x,y)=L_1\sum_{s=0}^{[n/c_1]}\frac{w_s\,z^s}{s!}\,F\left[\begin{matrix}\phi,\,\triangle(1+\lambda;\,\beta);\\ \psi,\,\triangle(\lambda;\,\beta);\end{matrix}\;-\frac{(\lambda+1)^{\lambda+1}}{\lambda^\lambda}\right] \tag{1.5}$$

दशा 4 : $d_1\, c_2=0$ के लिए अथवा $d_1=0$, तो

$$M_n(x, y)=L_1 \sum_{s=0}^{[n/c_1]} \frac{w_s\, z^s}{s!}\, F\left[\begin{matrix}\phi: d_3+d_2 \\ \psi:\end{matrix}\; -\eta\right]. \tag{1.6}$$

इसी तरह अन्य चार दशाओं के लिए बहुपद सेट को उच्च कोटि के चार हाइपरज्यामितीय घटकों के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है ।

विशिष्ट दशाएँ

1. (1.3) में प्राचलों

$$l_2=p_2=b_2=a_2=0;\quad c_2=d_1=x=1;\quad a_3=-1;\quad b_1=2,\ d_3=\tfrac{1}{2},\ c_3=-1$$

के विशिष्टीकरण पर

$$M_n(1, y)=\frac{1}{n!\; 2^{2n}}\, H_{2n}\,(y),$$

$H_{2n}(y)$ हर्माइट बहुपद हैं ।

2. (1.4) में

$$a_3=d_1=c_3=x=c_2=b_1=1:\quad d_3=1+\lambda;\quad p_2=l_2=b_3=b_2=0$$

रखने पर हाइपरज्यामितीय फलन का विस्तार करने तथा संकलन के क्रम को उलट देने पर हमें लागेर बहुपद

$$M_n(1, y)=L_n^{\lambda}\,(y),$$

प्राप्त होते हैं ।

इसी तरह (2.3) से शिवली-टोस्कैनो. गाटलीब, सिल्वेस्टर तथा अन्य लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपद प्राप्त किये जाते हैं जो नवीन प्रतीत होते हैं ।

3. (1.4) में

$$b_1=d_3=c_3=d_3=x=c_2=l_2=1;\quad p_2=0,\ v_1=\tfrac{1}{2};\quad a_3=-2,\ d_1=2,\ y=Y-1$$

रखने पर

$$M_n(1, Y-1)=P_n(\,Y),$$

जो कि लीगेण्ड्र बहुपद हैं ।

4. (1.4) में

$$b_1=c_2=c_3=x=p_2=1;\ l_2=2=d_1;\ d_3=1+c+D;\ v_1=\frac{1+c+D}{2};\ v_2=\frac{2+c+D}{2};$$

$$l_2=1+c;\ a_3=-2;\ a_2=b_2=b_3=0;\ Y-1$$

का प्रयोग करने पर, हाइपरज्यामितीय रूपों का विस्तार करने पर तथा संकलन का क्रम उलट देने पर हमें निम्न की प्राप्ति होगी

$$M_n(1,\ Y-1)=\frac{(1+c+D)_n}{(1+c)}\ P_n^{(c,\ D)}(Y),$$

जहाँ

$$P_n^{(c,\ D)}(Y)$$

जैकोबी बहुपद हैं। प्राचलों के उपयुक्त चुनाव से गेगेनबार, सिस्टर सेलीन, राइस, बेटमैन, कोहेन तथा अन्य रोचक बहुपद प्राप्त होंगे। (1.5) तथा (1.6) में प्राचलों के उपयुक्त चुनाव से सिटैंग-लेफ्लर चार्लियर माइक्सनर, श्रीवास्तव, बर्नौली तथा अनेक रोचक बहुपद प्राप्त होते हैं।

संकेतन

(1) $\phi_k-\Delta r_k[c_2;\ 1-(a_{p_2})-n]\ \Delta^4 k[c_2;\ 1-(a_{p_1})-n]\ \Delta k[c_2;\ -n+c_1 s].$

(2) $\psi_k=\Delta^1 k[c_2;\ 1-(v_{l_1})-n]\ \Delta^2 k[c_2;\ 1-(v_{l_1})-n].$

(3) $\beta=d_1 n+d_3+(d_2-d_1\ c_1)\ s.$

(4) $\eta=(-c_2)^{(1-l_1-l_2+p_1+p_2)c_2}\ (-a_3)^{c_2}\ c_3\ x^{a_2}\ y^{b_2-b_1\ c_2}.$

(5) $$(w)_s=\frac{[(v_{l_3})]_s\ \Delta^3{}_s[c_1;\ 1-(a_{p_2})-n+c_2\ k]\ \Delta_s[c_1;\ -n]}{\Delta^1{}_s[c_1;\ 1-(v l_1)-n+c_2 k]\ \Delta^2{}_s[(c_1-1);\ 1-(v l_1)-n+c_2\ k]}\times \frac{\Delta^4{}_s[(c_2-1);\ 1-(a_{p_1})-n+c_2 k]}{[(a_{p_3})]_s}.$$

(6) $z=(1-c_1)^{(1-c_1)\ (l_1-p_1)}\ (-c_1)^{-c_1(l_2-p_2-1)}\ (-a_3)^{-c_2}\ (-b_3\ x^{a_1}\ y^{-b_1 c_1}.$

(7) $$L_1=\frac{[(v l_1)]_n\ [(v l_2)]_n}{[(a_{p_1})]_n\ [(a_{p_2})]_n\ n!}\ (-a_3\ y^{b_1})^n.$$

(8) $P^*=d_3+d_1 n;\ (d_2-d_1\ c_1)\ s+1-d_1\ c_2)\ k=e^*.$

(9) $n^*=n-c_2 k-c_1 s+s$: $v'_j=(v_j+n+s);\ v''_j=v_j+n;\ v'''_j=v_j+s.$

(10) $a'_j=a_j+n+s;\ a''_j=a_j+n;\ a'''_j=a_j+s.$

(11) $T=1-c_3\ x^{a_2}\ y^{b_2}$: $g=d_1 n+d_2 s+d_3.$

(12) $T'=e_3\ x^{a_2}\ y^{b_2};\ P^{**}=1+c_2(1+p_1+p_2);\ L^*=c_2(l_1+l_2).$

$$(13)\quad L=\frac{\prod_{j=m_2+1}^{l_2}\Gamma(1-v''_j)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(a''_j)\prod_{j=m_3+1}^{l_2}\Gamma(1-v'''_j\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(a''_j)}{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(v''_j)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-a''_j)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(v'''_j)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-a'''_j)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a'_j)\prod_{j=m_1+1}^{l_2}\Gamma(1-v'_j)}{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a'_j)\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(v''_j)}.$$

$$(14)\quad X=\frac{a_3\,y^{b_1}\,t}{(T^{d_1})},\; Y=\frac{b_3\,x^{a_1}\,t^{d_1}}{T^{d_2}}$$

निर्देश

1. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, The Mathematics Education, 1971, 5(1), 5-12.
2. रेनविले, ई० डी०, Special functions, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क 1960
3. माइजर, सी० एस० Proc. Nederl. Acad. Wetensch. Amsterdam. 1946.

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पाश्र्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेगी।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक